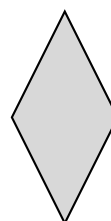
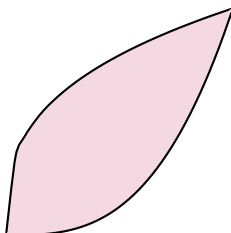
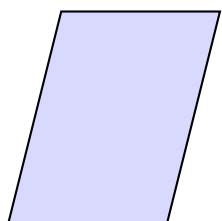
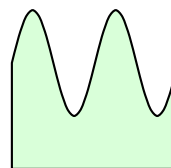
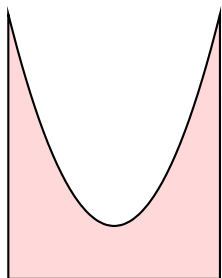


Kapitel 5

Arealer og Integration

I det følgende præsenteres en undersøgende tilgang til introduktionen af integraler med udgangspunkt i klassisk geometrisk arealberegning. Først og fremmest cementerer vi vores forståelse af arealer i geometrisk forstand, som for mange elever i gymnasiet vil fungere som repetition. Herefter bemærker vi, at geometrisk arealberegning ligeledes kan forstås i en analytisk kontekst som arealer under grafer for funktioner. Denne betragtning leder os til spørgsmålet om arealer af områder indkredset af grafer for funktioner, og efter en grundig undersøgelse leder dette arbejde os til definitionen af integralet samt en motivation for efterfølgende arbejde med stamfunktioner og analysens fundamentalsætning.

Miljø. Betragt de forskellige figurer vist herunder.



Hvad vil det sige at bestemme arealet af ovenstående figurer - og hvordan gør man? Overvej, hvilke metoder du har i dit repertorie til at besvare netop dette spørgsmål. ◦

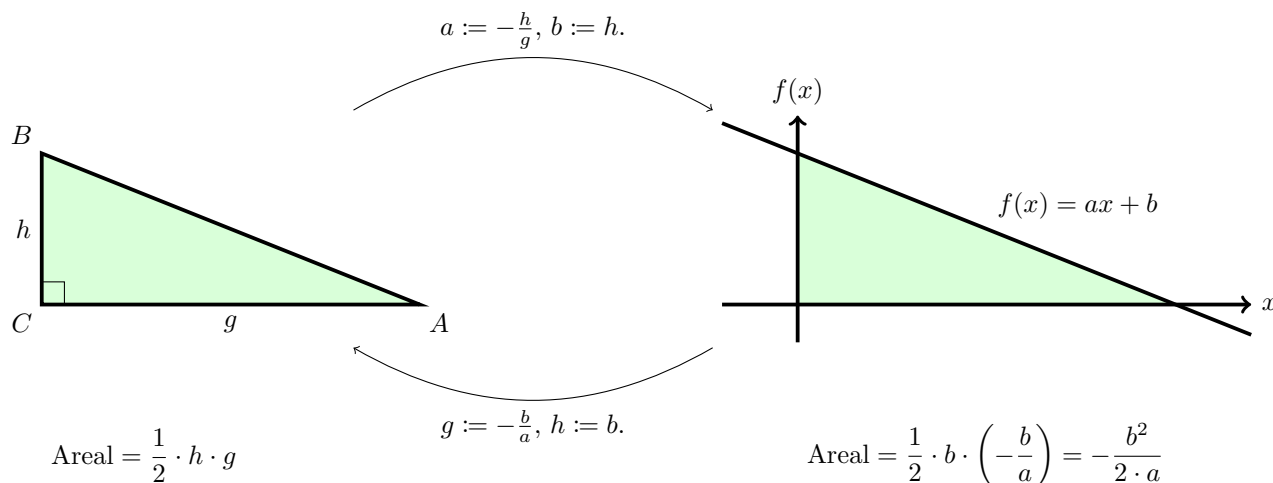
5.1 Kernestof

5.1.1 Arealer i Geometri og Analyse

Vi indleder med at minde læseren om en lang række figurer, som vi kan bestemme arealet af ud fra geometriske betragtninger (se bilag).

Det er let at tænke på en 2-dimensional figur, hvor vi ikke umiddelbart ved, hvordan man kan bestemme arealet ud fra geometriske betragtninger. I det følgende vil vi undersøge figurer, som kan indkredses af kontinuerte funktioner. Først vil vi imidlertid forsøge at oversætte noget af vores geometrisk funderede viden om arealer af 2-dimensionale figurer til et analytisk sprog for at indikere, at en analytisk tilgang er mindst lige så frugtbar. Mere konkret er tanken, at oversætte vinkler og sidelængder til funktionsforskrifter.

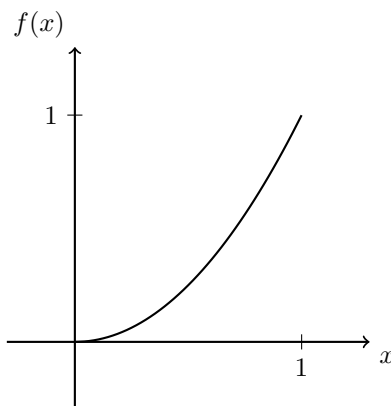
Betragt eksempelvis en relativt simpel figur som en revinklet trekant som vist herunder. Vi kan indlejre denne figur i et 2-dimensionalt koordinatsystem og betragte hypotenusen som et linjestykke af en ret linje med forskrift $y = ax + b$. De to kateter betragtes som linjestykker fra de to koordinataksler.



Læseren opfordres til at overveje, hvordan andre figurer kan indlejres i et koordinatsystem og betragtes som et område indkredset af en eller flere kontinuerte funktioner. Overvej eksempelvis generelle trekanter, firkanter eller cirkler. Den konkrete udformning er ikke vigtig, men idéen at geometriske figurer *kan* indkredses af kontinuerte funktioner er essentiell!

5.1.2 Areal under avancerede funktioner: $f(x) = x^2$

Det er umiddelbart svært at bestemme arealet indkredset af mere avancerede funktioner eksakt, men for at have et udgangspunkt kan vi prøve at approksimere arealet. Med udgangspunkt i funktionen $f(x) = x^2$ spørger vi, hvordan kan vi tilnærme os arealet under grafen i intervallet $[0, 1]$?



En naturlig tilgang til at approksimere arealet under en funktion er at inddele definitionsintervallet $[a, b]$ i mindre delintervaller og i hvert delinterval approksimere arealet. Vi siger $I = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subseteq [a, b]$ er en *inddeling* af $[a, b]$, hvis

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b,$$

og vi definerer *finheden* af inddelingen I ved $\text{fin}(I) := \min_i (x_i - x_{i-1})$. Endelig siger vi, at en inddeling I af intervallet $[a, b]$ er *finere* end J , hvis $J \subseteq I$.

Vi definerer nu en række begreber, som relaterer til udfordringen med at approksimere arealet under grafen for en funktion.

Definition 5.1.1. Lad $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ og lad $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ være en kontinuert funktion. Lad $I = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ være en inddeling af $[a, b]$.

- *Venstresummen, højresummen og middelsummen* af f med hensyn til I er henholdsvis

$$\sum_{i=1}^n f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}), \quad \sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \quad \text{og} \quad \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)(x_i - x_{i-1}).$$

- *Undersummen og oversummen* af f med hensyn til I er henholdsvis

$$U(f, I) := \sum_{i=1}^n \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)(x_i - x_{i-1}) \quad \text{og} \quad O(f, I) := \sum_{i=1}^n \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)(x_i - x_{i-1}).$$

- Arealet under den *lineære approksimation* af f med hensyn til I er

$$\sum_{i=1}^n \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} (x_i - x_{i-1}).$$

Det er ikke umiddelbart klart, hvilken sum der giver anledning til den bedste approksimation givet en inddeling, men i alle tilfælde er det intuitivt overbevisende, at en finere inddeling giver anledning til en stadigt bedre approksimation af arealet under grafen for f . Det er klart, at undersummen altid er mindre end eller lig venstresummen, højresummen og middelsummen samt arealet under den lineære approksimation af f , som igen alle er mindre end eller lig oversummen. Mere overraskende er måske, at forskellen på undersummen og oversummen går mod 0, når man vælger stadig finere inddelinger.

Sætning 5.1.2. Lad $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, betragt en kontinuert funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ og betragt for alle $n \in \mathbb{N}$ inddelingerne $I_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ og antag af finheden heraf går mod 0 for $n \rightarrow \infty$. Da går forskellen mellem undersummen og oversummen af f med hensyn til I_n mod 0 for $n \rightarrow \infty$.

Bevis. Lad $\varepsilon > 0$. Da f er kontinuert findes $\delta > 0$, så der gælder

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Eftersom finheden af I_n går mod 0, da findes $N \in \mathbb{N}$, så for alle $n \geq N$ haves $\text{fin}(I_n) < \delta$.

Vælg $n \geq N$. For ethvert $i = 0, 1, \dots, k$ og for alle $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$ gælder da $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, hvorfor det følger at

$$0 \leq \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) - \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \leq \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Men det følger da, at for haves $k \geq K$ haves

$$\begin{aligned} O(f, I_n) - U(f, I_n) &= \sum_{i=1}^n \left(\sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) - \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \right) (x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b - a} (b - a) = \varepsilon, \end{aligned}$$

hvilket viser, at for ethvert $\varepsilon > 0$ der gælder, at for tilstrækkeligt store $k \in \mathbb{N}$, så er forskellen på undersummen og oversummen af f med hensyn til I_k mindre end eller lig ε . Med andre ord går forskellen på undersummen og oversummen af f med hensyn til I_n mod 0 for $n \rightarrow \infty$. $\square$

Ovenstående resultat viser, at når vi betragter en følge af inddelinger, hvis finhed går mod 0, så går undersummen og oversummen af f med hensyn til de givne inddelinger mod det samme. Da undersummen og oversummen af f er vores henholdsvis mindste og største approksimation af arealet viser dette, at alle vores approksimationer går mod det samme tal, når finheden går mod 0 - nemlig arealet! Dette retfærdiggør, at vi herunder definerer integralet som grænseværdien af højresummerne for en bestemt følge af inddelinger. Vi har ikke vist, at for to forskellige følger af inddelinger, hvis finhed går mod 0, da går undersummerne og oversummerne for en kontinuert funktion f med hensyn til de forskellige inddelinger faktisk mod det samme. Af hensyn til omfanget udelades dette og integralet defineres med udgangspunkt i en inddeling, hvor punkterne er fordelt jævnt i intervallet.

Definition 5.1.3. Lad $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, betragt en kontinuert funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ og lad $I_N = \{a, a + \frac{b-a}{N}, a + 2\frac{b-a}{N}, \dots, b\}$ være inddelinger af intervallet $[a, b]$ for alle $N \in \mathbb{N}$. Da er *integralet af f over intervallet $[a, b]$* givet ved

$$\int_a^b f(x) \, dx := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^N f\left(a + i \frac{b-a}{N}\right)$$

Vores diskussion frem til nu viser, at integralet af f over intervallet $[a, b]$ netop beskriver arealet under f i intervallet $[a, b]$. Vi er således nu i en position til at bestemme arealet under $f(x) = x^2$ på intervallet $[0, 1]$.

Eksempel 5.1.4. Lad $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ være givet ved $f(x) = x^2$ og betragt for $n \in \mathbb{N}$ en inddeling af intervallet

$$I_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\right\}.$$

Vi bemærker først, at

$$\sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3},$$

hvor den sidste lighed følger af Lemma 5.2.2. Vi får således, at arealet under grafen for f i intervallet $[0, 1]$ er givet ved

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}.$$

At bestemme arealer indkredset af kontinuerte funktioner på ovenstående måde er generelt særdeles omstændigt og kræver ad hoc argumenter til udregning af summen som i eksemplet herover. Heldigvis findes der dybe resultater i matematisk analyse, som gør situationen markant lettere.

Theorem 5.1.5 (Analysens Fundamentalsætning). Lad $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ og betragt en kontinuert funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Lad $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ være funktionen defineret ved

$$F(x) := \int_a^x f(t) \, dt$$

Da er F differentiabel i intervallet (a, b) , og der gælder $F'(x) = f(x)$ for alle $x \in (a, b)$ og $F(a) = 0$.

Bevis. Lad $x \in (a, b)$ og betragt $\Delta x \in \mathbb{R}$, så $x + \Delta x \in [a, b]$. Da gælder¹

$$\int_a^x f(t) \, dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) \, dt = \int_a^{x+\Delta x} f(t) \, dt$$

Ved at omskrive ovenstående får vi således

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t) \, dt$$

Det er imidlertid klart, at

$$\Delta x \min_{a \in [x, x+\Delta x]} f(a) \leq \int_x^{x+\Delta x} f(t) \, dt \leq \Delta x \max_{a \in [x, x+\Delta x]} f(a),$$

¹Et bevis kræver en mere fleksibel definition med vilkårlige inddelinger.

så fordi f er kontinuert, må der findes $c \in [x, x + \Delta x]$ ², som opfylder

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x + \Delta x} f(t) dt = f(c)$$

Lader vi nu Δx gå mod 0, opdager vi

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c) = f(x),$$

hvor det sidst lighedstegn følger, da $x \leq c \leq x + \Delta x$, og $x + \Delta x \rightarrow x$ for $\Delta x \rightarrow 0$, og f er kontinuert. $\square$

For at bestemme integralet kan vi i stedet for at udregne en kompliceret sum og undersøge grænseværdien af den, blot lede blandt funktion F , som opfylder $F' = f$. Og det er en god strategi, på grund af følgende resultat.

Korollar 5.1.6. Lad $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ og betragt en kontinuert funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Da findes netop én funktion, som opfylder $F'(x) = f(x)$ for alle $x \in (a, b)$ og $F(a) = 0$.

Bevis. Lad F, G være funktioner, som opfylder $F'(x) = f(x) = G'(x)$ og $F(0) = 0 = G(0)$. Det følger da, at

$$(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = 0,$$

hvorfor der findes en konstant $c \in \mathbb{R}$, så $F(x) - G(x) = c$ for alle $x \in [a, b]$. Denne konstant er nødvendigvis 0, så $F(0) = 0 = G(0)$, hvorfor vi konkluderer $F(x) = G(x)$ for alle $x \in [a, b]$.

Det følger af Theorem 5.1.5, at der faktisk findes en funktion med de givne egenskaber. $\square$

Ovenstående motiverer introduktionen af stamfunktioner, integralregneregler og udregning af bestemte integraler, som er klassisk pensum i gymnasiet.

²Et bevis kræver en stringent definition af kontinuitet

5.2 Appendiks

Lemma 5.2.1. Lad $N \in \mathbb{N}$. Da gælder

$$1 + 2 + 3 + \dots + (N - 1) + N = \frac{N(N + 1)}{2}$$

Bevis. Vi bemærker, at ved først at skrive summen almindeligt op og derunder skrive summen i modsat rækkefølge, så kan vi lægge elementerne sammen lodret og få

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & N - 1 & + & N \\ N & + & N - 1 & + & N - 2 & + & \dots & + & 2 & + & 1 \\ \hline N + 1 & + & N + 1 & + & N + 1 & + & \dots & + & N + 1 & + & N + 1 \end{array}$$

På den nederste række står $N + 1$ lagt sammen med sig selv i alt N gange, som selvfølgelig i alt giver $N(N + 1)$. Det dobbelte af summen er således $N(N + 1)$, hvorfor summen i sig selv blot er halvdelen, altså

$$1 + 2 + 3 + \dots + N = \frac{N(N + 1)}{2}$$

Dette viser det ønskede. □

Lemma 5.2.2. Lad $N \in \mathbb{N}$. Da gælder

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (N - 2)^2 + (N - 1)^2 + N^2 = \frac{N(N + 1)(2N + 1)}{6}$$

Bevis. Vi bemærker, at ved først at skrive alle ledene fra summen på en lodret søjle og ved siden af skrive ledene fra Lemma 5.2.1, så kan vi lægge elementerne sammen vandret og få

$$\begin{array}{ccccccccc} N^2 & + & N & = & N(N + 1) & = & 2(1 + 2 + 3 + \dots + (N - 2) + (N - 1) + N) \\ (N - 1)^2 & + & N - 1 & = & (N - 1)N & = & 2(1 + 2 + 3 + \dots + (N - 2) + (N - 1)) \\ (N - 2)^2 & + & N - 2 & = & (N - 2)(N - 1) & = & 2(1 + 2 + 3 + \dots + (N - 2)) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 3^2 & + & 3 & = & 3 \cdot 4 & = & 2(1 + 2 + 3) \\ 2^2 & + & 2 & = & 2 \cdot 3 & = & 2(1 + 2) \\ 1^2 & + & 1 & = & 1 \cdot 2 & = & 2(1) \end{array}$$

Lægger vi nu sammen lodret længst til venstre og længst til højre fås

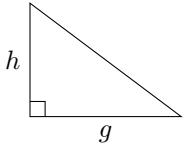
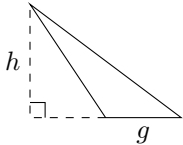
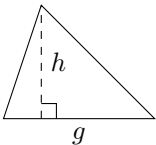
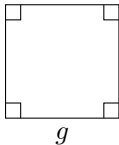
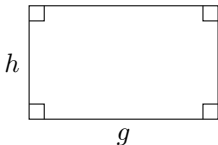
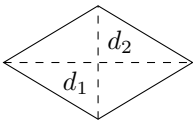
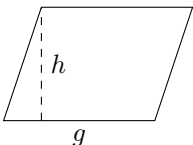
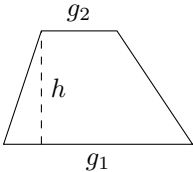
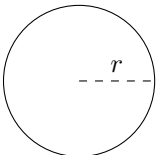
$$\sum_{n=1}^N n^2 + \sum_{n=1}^N n = 2 \sum_{n=1}^N n(N + 1 - n) = 2(N + 1) \sum_{n=1}^N n - 2 \sum_{n=1}^N n^2$$

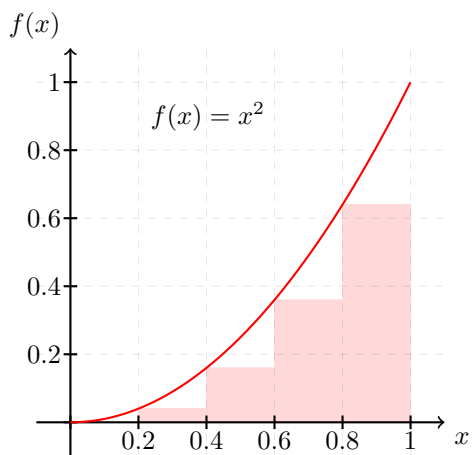
som kan omskrives til

$$3 \sum_{n=1}^N n^2 = (2N + 1) \sum_{n=1}^N n \stackrel{(\dagger)}{=} \frac{N(N + 1)(2N + 1)}{2}$$

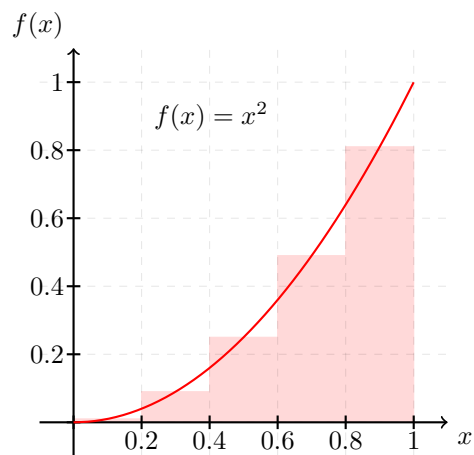
hvor $(\dagger)$ følger af Lemma 5.2.1. Ved at dividere med 3 på begge sider fås det ønskede. □

5.3 Bilag

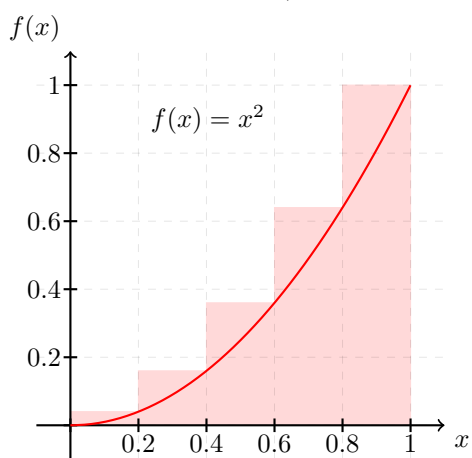
Navn	Tegning	Geometrisk Formel for Areal
Trekanter	Retvinklet 	$\frac{1}{2} \cdot h \cdot g$
	Stumpvinklet 	$\frac{1}{2} \cdot h \cdot g$
	Spidsvinklet 	$\frac{1}{2} \cdot h \cdot g$
Firkanter	Kvadrat 	g^2
	Rektangel 	$h \cdot g$
	Rombe 	$\frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2$
	Parallelogram 	$h \cdot g$
	Trapez 	$\frac{1}{2} \cdot h \cdot (g_1 + g_2)$
Cirkel		πr^2



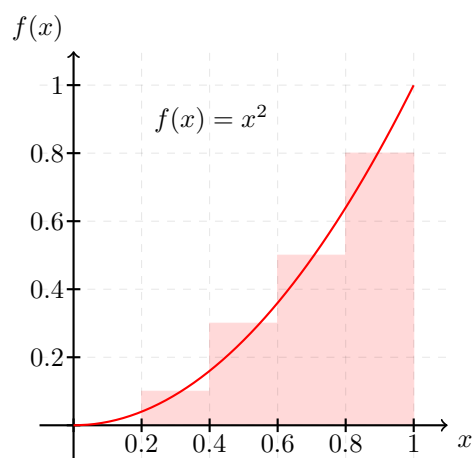
Figur 5.1: Undersum / Venstresum



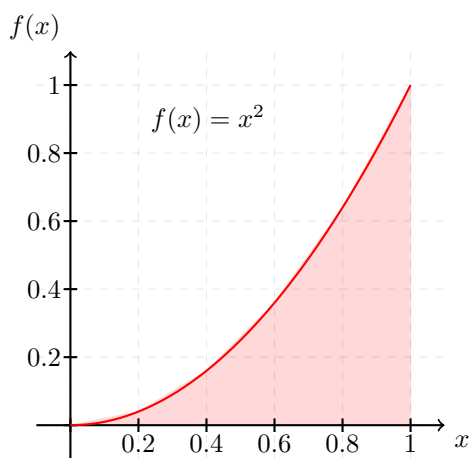
Figur 5.3: Middelsum



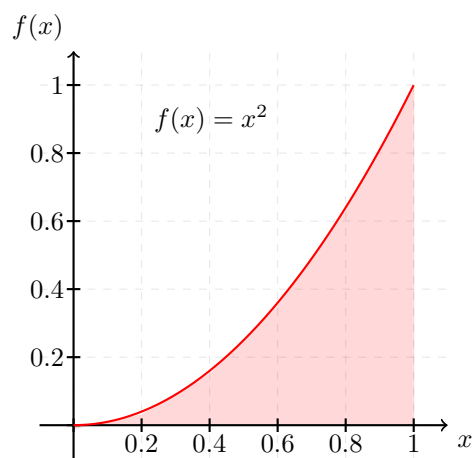
Figur 5.2: Oversum / Højresum



Figur 5.4: Antal (halve) kasser



Figur 5.5: Lineær approximation



Figur 5.6: Lineær approximation med tangent

5.4 Arealet under $f(x) = x^2$

Navn	Beskrivelse	Formel	Fordele	Ulemper
Undersum.	I hvert interval bestemmes den mindste værdi, og vi finder arealet af søjlen med denne højde. Alle søjlernes areal lægges sammen.	$\frac{(N-1)N(2N-1)}{6N^3}$	Præcist defineret, simpel at beregne.	Upræcis for store intervaller, altid for lille.
Oversum.	I hvert interval bestemmes den største værdi, og vi finder arealet af søjlen med denne højde. Alle søjlernes areal lægges sammen.	$\frac{N(N+1)(2N+1)}{6N^3}$	Præcist defineret, simpel at beregne.	Upræcis for store intervaller, altid for stor.
Middelsum.	I hvert interval bestemmes funktionsværdien i intervallets midtpunkt, og vi finder arealet af søjlen med denne højde. Alle søjlernes areal lægges sammen.	$\frac{2N^2+1}{6N^2}$	Præcist defineret.	Kompliceret at beregne, arbitrær, upræcis
Lineær approksimation.	Træt en ret linje fra punktet på grafen i venstre endepunkt af intervallet til punktet på grafen i højre endepunkt af intervallet, og bestem arealet under den rette linje. Alle arealerne lægges sammen.	$\frac{2N^2+1}{6N^2}$	Præcist defineret, simpel at beregne.	Upræcis for store intervaller.
Lineær approksimation med Tangent.	Indtegn tangenten i midtpunktet af intervallet og beregn arealet under tangent i det givne interval. Alle arealerne lægges sammen.	$\frac{(N-1)(2N-1)}{3N^2} + \frac{N-1}{N^2}$	Præcist defineret, simpel formel.	Kompliceret generelt, kræver differentiability
Antal kasser under grafen.	Vi tæller antallet af kasser under grafen og ganger med arealet af kasserne.	?	Simpel.	Upræcist defineret, ingen formel.