

Kapitel 1

Introduktion

1.1 Motivation for Undervisning i Undersøgende Matematik

I det følgende tages udgangspunkt udvalgte elementer fra læreplanen for Matematik A i STX 2017 som formulerevet af Undervisningsministeriet (UVM). Med disse nedslag vil vi understrege, hvor undervisning i undersøgende matematik passer ind i eksisterende målsætninger for matematikuddannelse på gymnasialt niveau.

I den konkrete beskrivelse af formålet med matematik A i STX giver Undervisningsministeriet udtryk for følgende ønsker til elevernes kompetencer i læreplanen fra 2017:

”Konkret skal eleverne opnå kompetence til at forstå, formulere og behandle problemer i relation til omverdensfænomener, såvel som viden om og kundskaber til at operere med matematisk ræsonnement, logisk tankegang og den kumulative opbygning af faget.”

Netop denne beskrivelse identificerer direkte, hvad vi vil senere vil benævne *matematisk aktivitet*. Bemærk desuden at kompetence til at *forstå, formulere og behandle* matematiske spørgsmål fremhæves ligeværdigt med *viden om og kundskaber til at udføre* matematisk arbejde, hvorfor undersøgende undervisning har sin plads ved siden af traditionel undervisning.

Blandt mere konkrete faglige mål nævnes i UVM læreplanen fra 2017, at eleverne skal

- *”kunne anvende symbolholdigt sprog til at løse problemer med matematisk indhold”,*

hvilket ligger i direkte forlængelse af kompetence til at *forstå, formulere og behandle* matematiske spørgsmål. Netop dette vil være i fokus for de indledende skridt i enhver undersøgelse af undervisningsmiljøerne, som præsenteres her.

Videre formulerer UVM læreplanen fra 2017 som et konkret fagligt mål, at eleverne skal kunne

- *”operere med og redegøre for matematiske ræsonnementer og beviser samt de induktive og deduktive sider ved opbygningen af matematisk teori”,*

hvilket ligger i naturlig forlængelse af *viden om og kundskaber til at udføre* matematisk arbejde. Efter en indledende undersøgelse af undervisningsmiljøerne, som præsenteres her, står eleverne med klart formulerede spørgsmål, som afkræver svar baseret på matematiske ræsonnementer. Desuden er flere af undervisningsmiljøerne centralt placeret i fagets kernepensum, og giver derfor naturlig motivation for opbygning af en matematisk teori.

Endelig præsenteres i UVM læreplanen fra 2017 det konkrete faglige mål, at eleverne skal

- *”demonstrere viden om fagets metoder og identitet.”*

I forståelsen af *fagets metode og identitet* som den konkrete beskrivelse fremhævet tidligere, så er en undersøgelsesbaseret undervisning den naturlige demonstration af fagets essens.

I tråd med ovenstående faglige målsætninger formulerer UVM læreplanen fra 2017 følgende didaktisk princip.

”Gennem en undersøgende tilgang til matematiske emner og problemstillinger skal elevernes matematiske begrebsapparat og innovative kompetencer udvikles. Dette sker blandt andet ved at tilrettelægge induktive forløb, hvor eleverne får mulighed for selvstændigt at formulere formodninger ud fra konkrete eksempler og eksperimenter.”

Med andre ord opfordres direkte til at undervise undersøgelsesbaseret i matematik, hvorfor undervisningsmiljøerne præsenteret her er naturlige at inddrage i den almindelig undervisning. Det nævnes samtidig, at

”Undervisningen organiseres i forløb med en passende balance og hensigtsmæssig sekvensering mellem undersøgelsesbaserede, dialogbaserede og formidlende aktiviteter”,

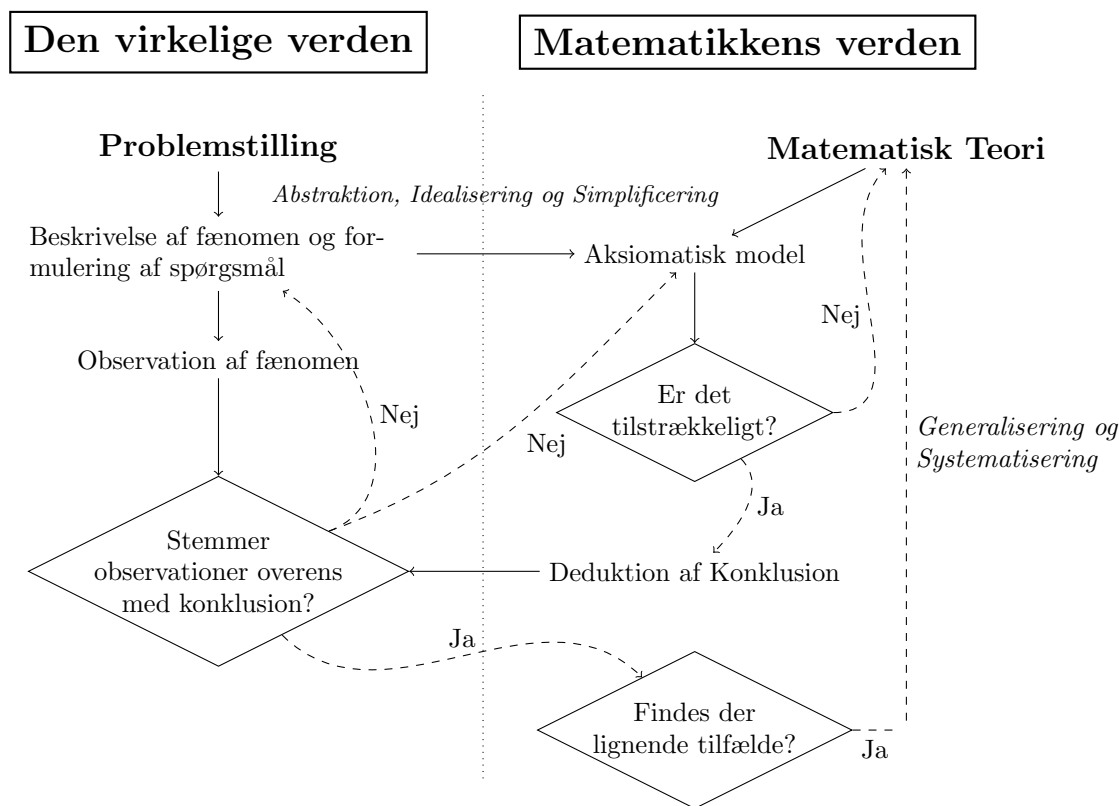
hvorfor undersøgelsesbaseret undervisning på ingen måde skal afløse eksisterende undervisningsparadigmer, blot supplere en mere traditionel tilgang.

1.2 Begrebsafklaring

I det følgende introduceres en række begreber og koncepter, som vedrører kompetencer inden for matematik og undervisning heri. Afsnittet indledes med en afgrænsning af området for matematisk virke efterfulgt af en hierarkisk præsentation af kompetencer inden for matematik. Endelig introduceres en række begreber, som skal strukturere og bevidstliggøre hvilke kompetencer er i fokus hvornår i en undervisningssituation.

1.2.1 Matematisk Aktivitet

For at kunne tale om kompetencer inden for matematik og undervisning heri er det centralt at præcisere, hvad der menes med matematisk aktivitet. I brede termer består en matematisk proces i at aksiomatisere et givent fænomen fra virkeligheden, deducere konklusioner med udgangspunkt i logiske slutninger og matematisk teori, sammenholde konklusionerne med iagttagelser af fænomenet og endelig at generalisere og systematisere resultaterne. En mere detaljeret beskrivelse er givet i Figur 1.1.



Figur 1.1: En model for matematisk aktivitet.

Enhver aktivitet, som involverer adskillig trin fra den generelle proces beskrevet i Figur 1.1, vil benævnes en *matematisk aktivitet*, mens udførelsen af ét enkelt trin vil benævnes en *matematisk aktion* eller blot *aktion*.

1.2.2 Taksonomiske Niveauer

For at gøre op med en tilgang til matematiske kompetencer baseret på kvantitativ evaluering af, *hvor mange* aktioner en elev kan udføre inden for en begrænset tidsramme, indfører vi herunder en række taksonomiske niveauer¹, som skal danne grundlag for en tilgang til matematiske kompetencer baseret på en kvalitativ vurdering af, *hvilken type* aktioner en elev kan udføre (inden for en begrænset tidsramme). Overordnet set betragter vi to kvalitativt forskellige arbejdsprocesser, som vi benævner henholdsvis det *konvergente* og *divergente* niveau. Det

¹Inspireret af 'Evaluating the Quality of Learning: The SOLO Taxonomy (New York: Academic Press, 1982)' skrevet af John Biggs og Kevin Collis, og 'The Open-Ended Approach: A New Proposal for Teaching Mathematics'.

divergente niveau forudsætter det konvergente niveau, men ikke omvendt. Hver af disse er yderligere inddelt i flere niveauer, som alle er beskrevet herunder.

- **Det Konvergente Niveau.**

Man tænker i det konvergente niveau, når man er fokuseret på at finde det entydigt bedste, etablerede svar til et velformuleret spørgsmål. Der er således ofte associeret et korrekt svar til et spørgsmål, der behandles med konvergent tænkning. I konvergente tankeprocesser vægtes fart, nøjagtighed og anvendelse af eksisterende viden eller teknikker højt.

- **Det Præstrukturelle Niveau.** Eleven har kendskab til grundlæggende begreber, men formår ikke at sammensætte informationen på en struktureret måde.

Eksempel. Eleven ved, at Pythagoras Læresætning siger, at $a^2 + b^2 = c^2$, men er ikke bevidst om, at resultatet kun gælder for retvinklede trekanter, og er ikke i stand til at udføre simple beregninger som at bestemme længden af hypotenusen givet længden af de to kateter.

- **Det Unistrukturelle Niveau.** Eleven formår at sammensætte information i indlysende strukturer, herunder simple logiske sammenhænge og udregninger.

Eksempel. Eleven er bevidst om, at resultatet kun gælder for retvinklede trekanter. Desuden er eleven i stand til at udføre simple beregninger som at bestemme længden af hypotenusen givet længden af de to kateter.

- **Det Multistrukturelle Niveau.** Eleven formår at sammensætte information i simple strukturer samt identificere mønstre eventuelt ved inddragelse af kendt teori.

Eksempel. Eleven er i stand til at udføre elementære beregninger, herunder at bestemme længden af en vilkårlig side givet længden af de to andre sider. Desuden er eleven i stand til at bruge Pythagoras Læresætning i andre situationer, eksempelvis til at bestemme længden af diagonalen i en 3-dimensional kasse.

- **Det Relationelle Niveau.** Eleven formår at sammensætte information i strukturer samt identificere og argumentere for mønstre eventuelt ved inddragelse af kendt teori.

Eksempel. Eleven er i stand til at identificere trekanter, hvor Pythagoras Læresætning ikke gælder, samt argumentere ved bevisførelse for, at Pythagoras Læresætning altid gælder for retvinklede trekanter.

- **Det Generaliserende Niveau.** Eleven formår at identificere antagelser eller begreber, som kan udelades eller generaliseres.

Eksempel. Eleven formår at formulere og argumentere for, at i en kasse med sidelængder a, b, c og diagonal d gælder $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$.

- **Det Divergente Niveau.**

Man tænker i det divergente niveau, når man er fokuseret på at finde hypotetisk mulige svar til et uklart formuleret spørgsmål. Der er sjældent associeret et korrekt svar til et spørgsmål, der behandles med divergent tænkning. I divergente tankeprocesser vægtes originalitet, dybde og afvigelse fra eksisterende viden inden for givne rammer.

- **Det Diffuse Niveau.** Eleven formår at identificere ufuldstændig information nødvendig for at afdække en given struktur.

Eksempel. Pythagoras Læresætning kan bruges til at vise, at afstanden fra origo til (x, y) i planen er $\sqrt{x^2 + y^2}$, mens afstanden fra origo til (x, y, z) i rummet er $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Eleven er i stand til at identificere, at afstanden fra origo til (x, y, z, w) i 4 dimensioner ikke har samme intuitive mening som de øvrige.

- **Det Definerende Niveau.** Eleven formår at identificere ufuldstændig information samt introducere begreber eller antagelser nødvendige for at afdække en given struktur.

Eksempel. Eleven i er stand til at introducere den naturlige definition, afstanden fra origo til (x, y, z, w) i 4 dimensioner er $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + w^2}$.

- **Det Abstraherende Niveau.** Eleven formår at identificere paralleller mellem umiddelbart forskellige koncepter.

Eksempel. Eleven formår at formulere udsagnet, at alle (heltals-)løsninger til ligningen $x^2 + y^2 = z^2$ giver anledning til en trekant med sidelængder x, y, z . Desuden er eleven bevidst om, at udsagnet sammen med Pythagoras Læresætning udgør et bindeled mellem Geometri og Algebra (Talteori).

Hvor det definerende niveau for divergent tænkning forudsætter det diffuse niveau, så forudsætter det abstraherende niveau hverken det diffuse eller definerende niveau.

Begreberne 'konvergent' og 'divergent' tænkning er kendt inden for psykologien. Traditionelt er undervisning i og kompetencer inden for matematik kraftigt associeret med konvergent tænkning, men undersøgende matematik er et forsøg på at bidrage til udviklingen af divergente tænkere inden for matematik.

1.2.3 Det Differentierede Aktivitetsbegreb

Med et nuanceret kompetencebegreb i matematik følger tilsvarende et behov for at nuancere matematikundervisningen. Traditionelt er meget matematikundervisning fokuseret på kompetencer relateret til konvergent tænkning, hvorfor det er nødvendigt at udvide det sædvanlige aktivitetsbegreb. Følgende differentiering af matematiske spørgsmål, som vi skal referere til som det *differentierede aktivitetsbegreb*, har til formål dels at skabe struktur og nuance i vores forståelse af matematiske spørgsmål, dels at øge bevidstheden om, hvilke kompetencer er i fokus hvornår.

- **Øvelse.** En *øvelse* er et klart formuleret spørgsmål, hvor det er tydeligt, hvad man skal gøre for at finde svar.

Eksempel. Givet linjestykker af længde 2 og 3, afgør om det er muligt at konstruere et linjestykke af længde 17 ved at lægge linjestykker af længde 2 og 3 i forlængelse af hinanden.

- **Opgave.** En *opgave* er et klart formuleret spørgsmål, hvor det ikke er tydeligt, hvad man skal gøre for at finde svar.

Eksempel. Givet linjestykker af længde 2 og 3, bestem alle linjestykke som kan konstrueres ved at lægge linjestykker af længde 2 og 3 i forlængelse af hinanden.

- **Problem.** Et *problem* er et uklart formuleret spørgsmål, der afkræver en introduktion af antagelser eller begreber.

Eksempel. Givet linjestykker af længde 2 og 3, bestem alle linjestykke som kan konstrueres heraf.

- **Miljø.** Et *miljø* er et (abstrakt) medie, der giver anledning til matematisk aktivitet.

Eksempel. Givet linjestykker af længde 2 og 3, hvilke matematiske overvejelser kunne man gøre sig om denne opsætning?

Det er nødvendigt at understrege, at skelnen mellem opgaver og problemer i nogle tilfælde er subjektiv og afhænger af den enkelte elev. Betragt eksempelvis følgende spørgsmål.

Spørgsmål. Bestem den størst mulige værdi af udtrykket

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x},$$

hvor x, y er vilkårlige positive tal.

For eleven som ikke er bekendt med en formel beskrivelse af den intuitive fornemmelse af "uendeligt stor", er dette spørgsmål et problem, eftersom det kræver en stringent definition af "uendeligt stor". Imidlertid kan dette spørgsmål betragtes som en Opgave, hvis ovennævnte definition er velkendt.

Som tidligere nævnt introduceres det differentierede aktivitetsbegreb for at sætte os i stand til at identificere hvilke kompetencer er i fokus hvornår. Om end der ikke er en direkte oversættelse mellem de taksonomiske niveauer og det differentierede aktivitetsbegreb, henledes læserens opmærksomhed på følgende paralleller.

- En øvelse kræver kendskab til det relevante begrebsapparat og evnerne til at udføre simple udregninger inden for emnet. Derfor giver øvelser i høj grad anledning til konvergent tænkning på det præ-, uni- og multistrukturelle niveau.
- En opgave kræver evnerne til at identificere og argumentere for underliggende mønstre samt gennemskue kausale sammenhænge mellem antagelser og konklusioner. Derfor giver opgaver anledning til konvergent tænkning på det relationelle og generaliserende niveau.
- Et problem kræver evnerne til at identificere ufuldstændig information og introducere nødvendige begreber eller antagelser. Derfor giver problemer anledning til divergent tænkning på både det diffuse og definerende niveau.
- Et miljø kræver evnerne til at formulere matematiske spørgsmål på alle niveauer med udgangspunkt i et medie. Derfor giver miljøer anledning til divergent tænkning på det abstraherende niveau.

Særligt når man ønsker at lægge fokus på enten konvergent eller divergent tænkning, er det nødvendigt at overveje udformningen af sine spørgsmål. Traditionelt skelnes mellem lukkede og åbne spørgsmål, og vi vil her følge samme praksis.

- **Lukkede spørgsmål.** Et *lukket* spørgsmål er en formulering, der lægger op til konkrete og klare svar, som kan klassificeres som rigtige eller forkerte. Det korrekte svar er ofte unikt.

Eksempel. Vis at udtrykket

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

kan blive vilkårligt stort, når x, y er vilkårlige positive tal.

- **Åbne spørgsmål.** Et *åbent* spørgsmål er en formulering, der lægger op til overvejelse og nuancerede svar, som ikke kan klassificeres som korrekte eller ukorrekte. Der er ofte adskillige meningsfulde svar.

Eksempel. Undersøg størrelsen af udtrykket

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x},$$

når x, y er vilkårlige positive tal.

Ovenstående begreber kombineres uden videre uddykning, hvorfor vi fremover vil tale om eksempelvis både åbne og lukkede opgaver og problemer.

Slutteligt understreges at ovenstående begrebsapparat ikke er udtømmende for nuancerne i hverken matematiske kompetencer eller spørgsmål, men skal blot fungere som et ufuldstændigt udgangspunkt for vores vinkel på undervisning i undersøgende matematik.

1.3 Undervisningsbeskrivelse med udgangspunkt i TDS

Blandt eleverne i enhver klasse, og mellem enhver klasse og hver eneste af deres undervisere er der etableret en ofte implicit forventning til, hvordan de forskellige parter agerer pædagogisk så vel som didaktisk. Vi vil i det følgende udelukkende fokusere på de didaktiske aspekter af forventningerne mellem underviser og elever, som vi skal referere til som den *didaktiske kontrakt*.

Først og fremmest er det nødvendigt at gøre sig klart, at i enhver klasse med enhver lærer er der etablerede forventninger til, hvordan undervisningen skal forløbe. Det kan eksempelvis forventes, at underviseren indleder en matematiktime med at præsentere dagens emne, dette efterfølges af elevernes selvstændige arbejde med at løse en række opgaver og endelig en opsamling, hvor underviseren gennemgår facit på opgaverne. Men hvad sker der, hvis eleverne ikke umiddelbart er i stand til at løse opgaverne på baggrund af den indledende præsentation, alt imens at dette netop var underviserens intention i et forsøg på at lære eleverne selv at udvikle metoder til at besvare matematiske spørgsmål? Før situationen kan lykkes er det helt centralt at italesætte det den didaktiske kontrakt, så eleverne har mulighed for at justere deres forventer til underviseren samt påtage sig det relevante ansvar for undervisningssituationen. I undersøgende matematikundervisning er det således essentielt, at eleverne påtager sig ansvaret for udviklingen af ny viden, mens underviseren skal give eleverne tid og plads til netop denne proces, som naturligvis kan faciliteres af underviseren. For uddybende redegørelse for den didaktiske kontrakt henvises til "*Didaktiske elementer*" af Carl Winsløw, som er fra 2006.

1.3.1 Teorien om Didaktiske Situationer

Manden bag teorien om didaktiske situationen er Guy Brousseau, som trods sin meget teoretiske tilgang arbejde med meget praksisnære elementer. En vigtig pointe for Brousseau er, at elevens læring ikke alene er afhængig af den kognitive aktivitet, men på tilsvarende vis afgørende afhængig af materialerne, det sociale miljø omkring arbejdet med materialet og ikke mindst lærerens adfærd.

En grundlæggende antagelse i teorien om didaktiske situationer er eksistensen af fundamentale undervisningssituationer, som kan abstraheres og generaliseres på tværs af forskellige lærere i forskellige klasser på forskellige klassetrin. Desuden ligger der iboende en antagelse om, at komplekse faglige forløb kan konstrueres ved at sammensætte ind til flere fundamentale undervisningssituationer. I beskrivelsen af en undervisningssituation inddrages både elevernes og lærerens faglige kompetencer og adfærd samt de fysiske rammer, undervisningsmaterialet og øvrige elementer, der kan tænkes at bidrage til undervisningen. Særligt relevant skelner Brousseau mellem didaktiske og adidaktiske situationer, som henholdsvis beskriver situationer, hvor læreren agerer aktivt og styrende i modsætning til lyttende og observerende.

I Brousseaus model for beskrivelse og planlægning af undervisning indgår fem forskellige situationer, som vi her kort vil gennemgå og desuden bruge til at formidle undervisningssessionerne udarbejdet i forbindelse med dette projekt.

Devolution

Abstrakt består devolutionen i overdragelsen af ansvaret for at drive undervisningen frem fra læreren til eleven, hvor eleven accepterer ansvaret. I denne situation er det således essentielt, at læreren sikre sig, at eleverne er trygge ved det overtagne ansvar samt har forudsætningerne for at lykkes med at drive undervisningen frem.

Aktion

Abstrakt består situationen i at eleverne agerer direkte i miljøet, og den umiddelbare feedback på elevernes arbejde ligger i miljøet selv; det skal med andre ord være gennemskueligt for eleverne, om de lykkes eller må arbejde videre, ud fra det selvstændige arbejde i miljøet.

Formulering

Med udgangspunkt i aktionssituationen - og måske endda i løbet af aktionssituationen -, forklarer eleverne hinanden, hvad og hvordan de har arbejdet med miljøet og hvilke iagttagelser de har gjort sig undervejs. At sætte ord på sine handlinger og lytte til andre elevers beskrivelser kan bidrage til særligt svagere elevers sproglige kompetencer.

Validering

I denne situation skal elevernes iagttagelser og formodninger valideres; med andre ord skal situationen udmynte sig i en afklaring af, hvilke postulater er korrekte, og hvilke der skal modificeres, forbedres eller forkastes. Ideelt opnås konsensus om korrektheden af et udsagn ved diskussion blandt eleverne, mens læreren faciliterer og bidrager konstruktivt kritisk til diskussionen.

Institutionalisering

Abstrakt består situationen i at placere undervisningssessionen i en bredere kontekst af fagets metode og øvrige faglige elementer. I denne situation er det ligeledes vigtigt, at læreren præciserer og tilføjer læringspointer, som måtte være uklare indtil nu.

Teorien om didaktiske situationer er en særdeles udbredt og anerkendt tilgang til undervisning i matematik, hvorfor der er meget mere at læse og mange gode kilder. Her fremhæves i særdeleshed "*Didaktiske elementer*" af Carl Winsløw, som er fra 2006.