

En Åben Tilgang til Teoretisk Matematik i Gymnasiet



Mads Friis Frand-Madsen

Juni 2021

Resumé

En åben tilgang til problemløsning i teoretisk matematik i gymnasiet er en mulighed for at tilføje dybere teoretiske perspektiver til den daglige undervisning. Spørgsmål, opgaver og formodninger, der måtte opstå med udgangspunkt i et velformuleret, åbent spørgsmål, har principielt ingen øvre begrænsning i sværhedsgrad og giver således mulighed for at favne selv de dygtigste elever i klassesituationen. At udnytte muligheden for selv at opstille og formulere formodninger kræver stort fagligt overblik, hvorfor dette aspekt af undersøgende arbejde primært er henvendt til særligt dygtige elever. En åben tilgang til problemløsning i matematik har en dokumenteret positiv effekt på matematisk kreativ tænkning samt matematisk selvstændighed, og begge disse kompetencer har langsigtet almen akademisk relevans. Endelig kan det øgede ansvar for egen læring desuden have en motiverende effekt – særligt på underpræsterende, højtbegavede elever.

I dette kompendie præsenteres fem eksemplariske beskrivelser af undervisningsforløb, som lægger op til særdeles aktiv undersøgelse. Her finder du det faglige indhold af hvert enkelte forløb, mens en videointroduktion med didaktiske overvejelser og faglige pointer samt lektionsplaner for introduktion til hvert enkelt forløb findes her. Du opfordres til at besøge hjemmesiden før de læser de faglige detaljer her. Indholdet af hvert undervisningsforløb tager sit udgangspunkt i klassiske emner i gymnasiet, herunder elementær talforståelse, potensregning, funktionstyper, integralregning og vektorer.

Indhold

1	Introduktion	2
1.1	Motivation for Undervisning i Undersøgende Matematik	2
1.2	Begrebsafklaring	4
1.2.1	Matematisk Aktivitet	4
1.2.2	Taksonomiske Niveauer	4
1.2.3	Det Differentierede Aktivitetsbegreb	6
1.3	Undervisningsbeskrivelse med udgangspunkt i TDS	8
1.3.1	Teorien om Didaktiske Situationer	8
2	Tallene som Byggesten	10
2.1	Kernestof	10
2.2	Perspektivering: Rekursive talfølger og Fibonacci's talfølge	13
2.2.1	Perspektivering: Effektiv konstruktion af nye linjestykker	14
2.2.2	Perspektivering: Primtal og Aritmetikkens Fundamentalsætning	15
2.2.3	Perspektivering: Bezout's Identitet	17
3	Fundamental Aritmetik	18
3.1	Kernestof	18
3.1.1	Perspektivering: Knuth's pil op $\uparrow$	20
3.1.2	Perspektivering: Generalisering til de Rationale Tal $\mathbb{Q}$	21
4	Klassifikation af Funktionstyper	23
4.1	Kernestof	23
4.1.1	Klassifikation af funktioner på baggrund af graf	24
4.1.2	Klassifikation af funktioner på baggrund af forskrift	25
4.1.3	Egenskaber ved forskellige funktionstyper	25
4.1.4	Perspektivering: Funktionalligninger	26
4.2	Bilag	30
5	Arealer og Integration	33
5.1	Kernestof	33
5.1.1	Arealer i Geometri og Analyse	33
5.1.2	Areal under avancerede funktioner: $f(x) = x^2$	34
5.2	Appendiks	38
5.3	Bilag	39
5.4	Arealet under $f(x) = x^2$	41
6	Lineær Algebra i Planen	42
6.1	Lineær Afhængighed i Planen	42
6.1.1	Euklidisk afstand i $\mathbb{R}^2$	43
6.1.2	Vinkler i $\mathbb{R}^2$	44
6.1.3	Arealer i $\mathbb{R}^2$	45
6.1.4	Perspektivering: Lineær Afhængighed i Rummet	46
6.1.5	Perspektivering: Løsning af Ligningssystemer og Lineær Afhængighed	47

Kapitel 1

Introduktion

1.1 Motivation for Undervisning i Undersøgende Matematik

I det følgende tages udgangspunkt udvalgte elementer fra læreplanen for Matematik A i STX 2017 som formulerevet af Undervisningsministeriet (UVM). Med disse nedslag vil vi understrege, hvor undervisning i undersøgende matematik passer ind i eksisterende målsætninger for matematikuddannelse på gymnasialt niveau.

I den konkrete beskrivelse af formålet med matematik A i STX giver Undervisningsministeriet udtryk for følgende ønsker til elevernes kompetencer i læreplanen fra 2017:

”Konkret skal eleverne opnå kompetence til at forstå, formulere og behandle problemer i relation til omverdensfænomener, såvel som viden om og kundskaber til at operere med matematisk ræsonnement, logisk tankegang og den kumulative opbygning af faget.”

Netop denne beskrivelse identificerer direkte, hvad vi vil senere vil benævne *matematisk aktivitet*. Bemærk desuden at kompetence til at *forstå, formulere og behandle* matematiske spørgsmål fremhæves ligeværdigt med *viden om og kundskaber til at udføre* matematisk arbejde, hvorfor undersøgende undervisning har sin plads ved siden af traditionel undervisning.

Blandt mere konkrete faglige mål nævnes i UVM læreplanen fra 2017, at eleverne skal

- *”kunne anvende symbolholdigt sprog til at løse problemer med matematisk indhold”,*

hvilket ligger i direkte forlængelse af kompetence til at *forstå, formulere og behandle* matematiske spørgsmål. Netop dette vil være i fokus for de indledende skridt i enhver undersøgelse af undervisningsmiljøerne, som præsenteres her.

Videre formulerer UVM læreplanen fra 2017 som et konkret fagligt mål, at eleverne skal kunne

- *”operere med og redegøre for matematiske ræsonnementer og beviser samt de induktive og deduktive sider ved opbygningen af matematisk teori”,*

hvilket ligger i naturlig forlængelse af *viden om og kundskaber til at udføre* matematisk arbejde. Efter en indledende undersøgelse af undervisningsmiljøerne, som præsenteres her, står eleverne med klart formulerede spørgsmål, som afkræver svar baseret på matematiske ræsonnementer. Desuden er flere af undervisningsmiljøerne centralt placeret i fagets kernepensum, og giver derfor naturlig motivation for opbygning af en matematisk teori.

Endelig præsenteres i UVM læreplanen fra 2017 det konkrete faglige mål, at eleverne skal

- *”demonstrere viden om fagets metoder og identitet.”*

I forståelsen af *fagets metode og identitet* som den konkrete beskrivelse fremhævet tidligere, så er en undersøgelsesbaseret undervisning den naturlige demonstration af fagets essens.

I tråd med ovenstående faglige målsætninger formulerer UVM læreplanen fra 2017 følgende didaktisk princip.

”Gennem en undersøgende tilgang til matematiske emner og problemstillinger skal elevernes matematiske begrebsapparat og innovative kompetencer udvikles. Dette sker blandt andet ved at tilrettelægge induktive forløb, hvor eleverne får mulighed for selvstændigt at formulere formodninger ud fra konkrete eksempler og eksperimenter.”

Med andre ord opfordres direkte til at undervise undersøgelsesbaseret i matematik, hvorfor undervisningsmiljøerne præsenteret her er naturlige at inddrage i den almindelig undervisning. Det nævnes samtidig, at

”Undervisningen organiseres i forløb med en passende balance og hensigtsmæssig sekvensering mellem undersøgelsesbaserede, dialogbaserede og formidlende aktiviteter”,

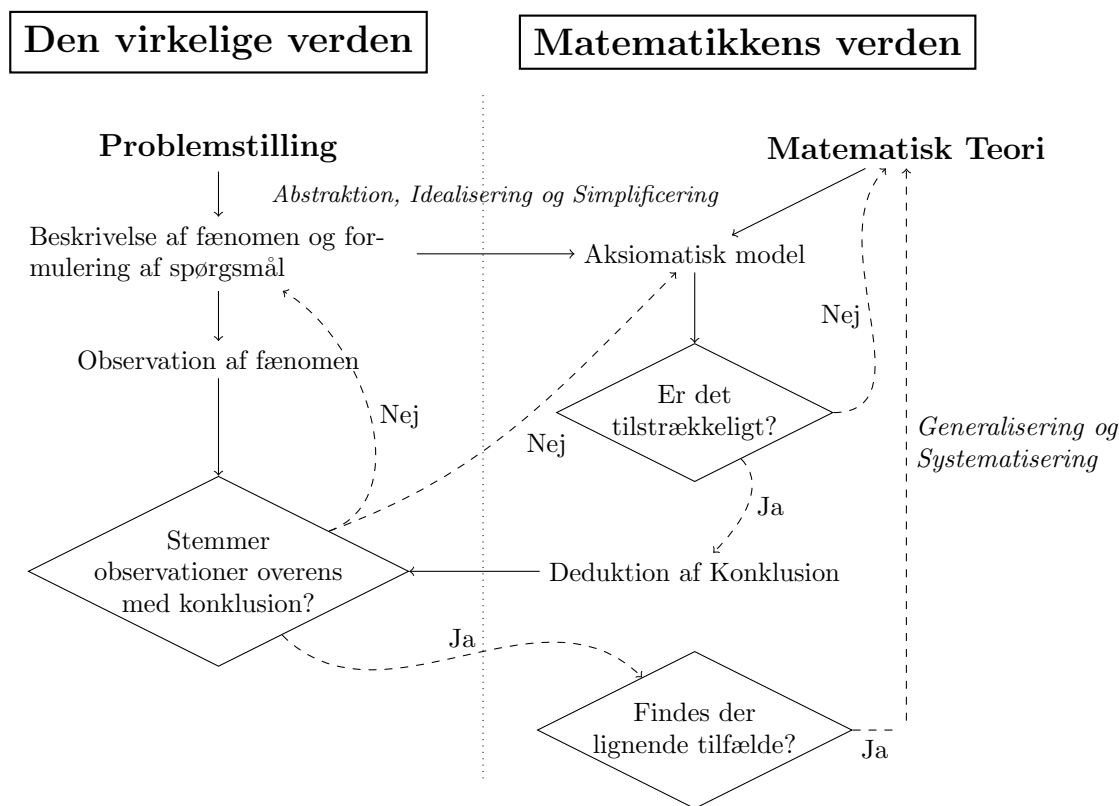
hvorfor undersøgelsesbaseret undervisning på ingen måde skal afløse eksisterende undervisningsparadigmer, blot supplere en mere traditionel tilgang.

1.2 Begrebsafklaring

I det følgende introduceres en række begreber og koncepter, som vedrører kompetencer inden for matematik og undervisning heri. Afsnittet indledes med en afgrænsning af området for matematisk virke efterfulgt af en hierarkisk præsentation af kompetencer inden for matematik. Endelig introduceres en række begreber, som skal strukturere og bevidstliggøre hvilke kompetencer er i fokus hvornår i en undervisningssituation.

1.2.1 Matematisk Aktivitet

For at kunne tale om kompetencer inden for matematik og undervisning heri er det centralt at præcisere, hvad der menes med matematisk aktivitet. I brede termer består en matematisk proces i at aksiomatisere et givent fænomen fra virkeligheden, deducere konklusioner med udgangspunkt i logiske slutninger og matematisk teori, sammenholde konklusionerne med iagttagelser af fænomenet og endelig at generalisere og systematisere resultaterne. En mere detaljeret beskrivelse er givet i Figur 1.1.



Figur 1.1: En model for matematisk aktivitet.

Enhver aktivitet, som involverer adskillig trin fra den generelle proces beskrevet i Figur 1.1, vil benævnes en *matematisk aktivitet*, mens udførelsen af ét enkelt trin vil benævnes en *matematisk aktion* eller blot *aktion*.

1.2.2 Taksonomiske Niveauer

For at gøre op med en tilgang til matematiske kompetencer baseret på kvantitativ evaluering af, *hvor mange* aktioner en elev kan udføre inden for en begrænset tidsramme, indfører vi herunder en række taksonomiske niveauer¹, som skal danne grundlag for en tilgang til matematiske kompetencer baseret på en kvalitativ vurdering af, *hvilken type* aktioner en elev kan udføre (inden for en begrænset tidsramme). Overordnet set betragter vi to kvalitativt forskellige arbejdsprocesser, som vi benævner henholdsvis det *konvergente* og *divergente* niveau. Det

¹Inspireret af 'Evaluating the Quality of Learning: The SOLO Taxonomy (New York: Academic Press, 1982)' skrevet af John Biggs og Kevin Collis, og 'The Open-Ended Approach: A New Proposal for Teaching Mathematics'.

divergente niveau forudsætter det konvergente niveau, men ikke omvendt. Hver af disse er yderligere inddelt i flere niveauer, som alle er beskrevet herunder.

- **Det Konvergente Niveau.**

Man tænker i det konvergente niveau, når man er fokuseret på at finde det entydigt bedste, etablerede svar til et velformuleret spørgsmål. Der er således ofte associeret et korrekt svar til et spørgsmål, der behandles med konvergent tænkning. I konvergente tankeprocesser vægtes fart, nøjagtighed og anvendelse af eksisterende viden eller teknikker højt.

- **Det Præstrukturelle Niveau.** Eleven har kendskab til grundlæggende begreber, men formår ikke at sammensætte informationen på en struktureret måde.

Eksempel. Eleven ved, at Pythagoras Læresætning siger, at $a^2 + b^2 = c^2$, men er ikke bevidst om, at resultatet kun gælder for retvinklede trekanter, og er ikke i stand til at udføre simple beregninger som at bestemme længden af hypotenusen givet længden af de to kateter.

- **Det Unistrukturelle Niveau.** Eleven formår at sammensætte information i indlysende strukturer, herunder simple logiske sammenhænge og udregninger.

Eksempel. Eleven er bevidst om, at resultatet kun gælder for retvinklede trekanter. Desuden er eleven i stand til at udføre simple beregninger som at bestemme længden af hypotenusen givet længden af de to kateter.

- **Det Multistrukturelle Niveau.** Eleven formår at sammensætte information i simple strukturer samt identificere mønstre eventuelt ved inddragelse af kendt teori.

Eksempel. Eleven er i stand til at udføre elementære beregninger, herunder at bestemme længden af en vilkårlig side givet længden af de to andre sider. Desuden er eleven i stand til at bruge Pythagoras Læresætning i andre situationer, eksempelvis til at bestemme længden af diagonalen i en 3-dimensional kasse.

- **Det Relationelle Niveau.** Eleven formår at sammensætte information i strukturer samt identificere og argumentere for mønstre eventuelt ved inddragelse af kendt teori.

Eksempel. Eleven er i stand til at identificere trekanter, hvor Pythagoras Læresætning ikke gælder, samt argumentere ved bevisførelse for, at Pythagoras Læresætning altid gælder for retvinklede trekanter.

- **Det Generaliserende Niveau.** Eleven formår at identificere antagelser eller begreber, som kan udelades eller generaliseres.

Eksempel. Eleven formår at formulere og argumentere for, at i en kasse med sidelængder a, b, c og diagonal d gælder $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$.

- **Det Divergente Niveau.**

Man tænker i det divergente niveau, når man er fokuseret på at finde hypotetisk mulige svar til et uklart formuleret spørgsmål. Der er sjældent associeret et korrekt svar til et spørgsmål, der behandles med divergent tænkning. I divergente tankeprocesser vægtes originalitet, dybde og afvigelse fra eksisterende viden inden for givne rammer.

- **Det Diffuse Niveau.** Eleven formår at identificere ufuldstændig information nødvendig for at afdække en given struktur.

Eksempel. Pythagoras Læresætning kan bruges til at vise, at afstanden fra origo til (x, y) i planen er $\sqrt{x^2 + y^2}$, mens afstanden fra origo til (x, y, z) i rummet er $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Eleven er i stand til at identificere, at afstanden fra origo til (x, y, z, w) i 4 dimensioner ikke har samme intuitive mening som de øvrige.

- **Det Definerende Niveau.** Eleven formår at identificere ufuldstændig information samt introducere begreber eller antagelser nødvendige for at afdække en given struktur.

Eksempel. Eleven i er stand til at introducere den naturlige definition, afstanden fra origo til (x, y, z, w) i 4 dimensioner er $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + w^2}$.

- **Det Abstraherende Niveau.** Eleven formår at identificere paralleller mellem umiddelbart forskellige koncepter.

Eksempel. Eleven formår at formulere udsagnet, at alle (heltals-)løsninger til ligningen $x^2 + y^2 = z^2$ giver anledning til en trekant med sidelængder x, y, z . Desuden er eleven bevidst om, at udsagnet sammen med Pythagoras Læresætning udgør et bindeled mellem Geometri og Algebra (Talteori).

Hvor det definerende niveau for divergent tænkning forudsætter det diffuse niveau, så forudsætter det abstraherende niveau hverken det diffuse eller definerende niveau.

Begreberne 'konvergent' og 'divergent' tænkning er kendt inden for psykologien. Traditionelt er undervisning i og kompetencer inden for matematik kraftigt associeret med konvergent tænkning, men undersøgende matematik er et forsøg på at bidrage til udviklingen af divergente tænkere inden for matematik.

1.2.3 Det Differentierede Aktivitetsbegreb

Med et nuanceret kompetencebegreb i matematik følger tilsvarende et behov for at nuancere matematikundervisningen. Traditionelt er meget matematikundervisning fokuseret på kompetencer relateret til konvergent tænkning, hvorfor det er nødvendigt at udvide det sædvanlige aktivitetsbegreb. Følgende differentiering af matematiske spørgsmål, som vi skal referere til som det *differentierede aktivitetsbegreb*, har til formål dels at skabe struktur og nuance i vores forståelse af matematiske spørgsmål, dels at øge bevidstheden om, hvilke kompetencer er i fokus hvornår.

- **Øvelse.** En *øvelse* er et klart formuleret spørgsmål, hvor det er tydeligt, hvad man skal gøre for at finde svar.

Eksempel. Givet linjestykker af længde 2 og 3, afgør om det er muligt at konstruere et linjestykke af længde 17 ved at lægge linjestykker af længde 2 og 3 i forlængelse af hinanden.

- **Opgave.** En *opgave* er et klart formuleret spørgsmål, hvor det ikke er tydeligt, hvad man skal gøre for at finde svar.

Eksempel. Givet linjestykker af længde 2 og 3, bestem alle linjestykke som kan konstrueres ved at lægge linjestykker af længde 2 og 3 i forlængelse af hinanden.

- **Problem.** Et *problem* er et uklart formuleret spørgsmål, der afkræver en introduktion af antagelser eller begreber.

Eksempel. Givet linjestykker af længde 2 og 3, bestem alle linjestykke som kan konstrueres heraf.

- **Miljø.** Et *miljø* er et (abstrakt) medie, der giver anledning til matematisk aktivitet.

Eksempel. Givet linjestykker af længde 2 og 3, hvilke matematiske overvejelser kunne man gøre sig om denne opsætning?

Det er nødvendigt at understrege, at skelnen mellem opgaver og problemer i nogle tilfælde er subjektiv og afhænger af den enkelte elev. Betragt eksempelvis følgende spørgsmål.

Spørgsmål. Bestem den størst mulige værdi af udtrykket

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x},$$

hvor x, y er vilkårlige positive tal.

For eleven som ikke er bekendt med en formel beskrivelse af den intuitive fornemmelse af "uendeligt stor", er dette spørgsmål et problem, eftersom det kræver en stringent definition af "uendeligt stor". Imidlertid kan dette spørgsmål betragtes som en Opgave, hvis ovennævnte definition er velkendt.

Som tidligere nævnt introduceres det differentierede aktivitetsbegreb for at sætte os i stand til at identificere hvilke kompetencer er i fokus hvornår. Om end der ikke er en direkte oversættelse mellem de taksonomiske niveauer og det differentierede aktivitetsbegreb, henledes læserens opmærksomhed på følgende paralleller.

- En øvelse kræver kendskab til det relevante begrebsapparat og evnerne til at udføre simple udregninger inden for emnet. Derfor giver øvelser i høj grad anledning til konvergent tænkning på det præ-, uni- og multistrukturelle niveau.
- En opgave kræver evnerne til at identificere og argumentere for underliggende mønstre samt gennemskue kausale sammenhænge mellem antagelser og konklusioner. Derfor giver opgaver anledning til konvergent tænkning på det relationelle og generaliserende niveau.
- Et problem kræver evnerne til at identificere ufuldstændig information og introducere nødvendige begreber eller antagelser. Derfor giver problemer anledning til divergent tænkning på både det diffuse og definerende niveau.
- Et miljø kræver evnerne til at formulere matematiske spørgsmål på alle niveauer med udgangspunkt i et medie. Derfor giver miljøer anledning til divergent tænkning på det abstraherende niveau.

Særligt når man ønsker at lægge fokus på enten konvergent eller divergent tænkning, er det nødvendigt at overveje udformningen af sine spørgsmål. Traditionelt skelnes mellem lukkede og åbne spørgsmål, og vi vil her følge samme praksis.

- **Lukkede spørgsmål.** Et *lukket* spørgsmål er en formulering, der lægger op til konkrete og klare svar, som kan klassificeres som rigtige eller forkerte. Det korrekte svar er ofte unikt.

Eksempel. Vis at udtrykket

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

kan blive vilkårligt stort, når x, y er vilkårlige positive tal.

- **Åbne spørgsmål.** Et *åbent* spørgsmål er en formulering, der lægger op til overvejelse og nuancerede svar, som ikke kan klassificeres som korrekte eller ukorrekte. Der er ofte adskillige meningsfulde svar.

Eksempel. Undersøg størrelsen af udtrykket

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x},$$

når x, y er vilkårlige positive tal.

Ovenstående begreber kombineres uden videre uddybning, hvorfor vi fremover vil tale om eksempelvis både åbne og lukkede opgaver og problemer.

Slutteligt understreges at ovenstående begrebsapparat ikke er udtømmende for nuancerne i hverken matematiske kompetencer eller spørgsmål, men skal blot fungere som et ufuldstændigt udgangspunkt for vores vinkel på undervisning i undersøgende matematik.

1.3 Undervisningsbeskrivelse med udgangspunkt i TDS

Blandt eleverne i enhver klasse, og mellem enhver klasse og hver eneste af deres undervisere er der etableret en ofte implicit forventning til, hvordan de forskellige parter agerer pædagogisk så vel som didaktisk. Vi vil i det følgende udelukkende fokusere på de didaktiske aspekter af forventningerne mellem underviser og elever, som vi skal referere til som den *didaktiske kontrakt*.

Først og fremmest er det nødvendigt at gøre sig klart, at i enhver klasse med enhver lærer er der etablerede forventninger til, hvordan undervisningen skal forløbe. Det kan eksempelvis forventes, at underviseren indleder en matematiktime med at præsentere dagens emne, dette efterfølges af elevernes selvstændige arbejde med at løse en række opgaver og endelig en opsamling, hvor underviseren gennemgår facit på opgaverne. Men hvad sker der, hvis eleverne ikke umiddelbart er i stand til at løse opgaverne på baggrund af den indledende præsentation, alt imens at dette netop var underviserens intention i et forsøg på at lære eleverne selv at udvikle metoder til at besvare matematiske spørgsmål? Før situationen kan lykkes er det helt centralt at italesætte det den didaktiske kontrakt, så eleverne har mulighed for at justere deres forventer til underviseren samt påtage sig det relevante ansvar for undervisningssituationen. I undersøgende matematikundervisning er det således essentielt, at eleverne påtager sig ansvaret for udviklingen af ny viden, mens underviseren skal give eleverne tid og plads til netop denne proces, som naturligvis kan faciliteres af underviseren. For uddybende redegørelse for den didaktiske kontrakt henvises til "*Didaktiske elementer*" af Carl Winsløw, som er fra 2006.

1.3.1 Teorien om Didaktiske Situationer

Manden bag teorien om didaktiske situationen er Guy Brousseau, som trods sin meget teoretiske tilgang arbejde med meget praksisnære elementer. En vigtig pointe for Brousseau er, at elevens læring ikke alene er afhængig af den kognitive aktivitet, men på tilsvarende vis afgørende afhængig af materialerne, det sociale miljø omkring arbejdet med materialet og ikke mindst lærerens adfærd.

En grundlæggende antagelse i teorien om didaktiske situationer er eksistensen af fundamentale undervisningssituationer, som kan abstraheres og generaliseres på tværs af forskellige lærere i forskellige klasser på forskellige klassetrin. Desuden ligger der iboende en antagelse om, at komplekse faglige forløb kan konstrueres ved at sammensætte ind til flere fundamentale undervisningssituationer. I beskrivelsen af en undervisningssituation inddrages både elevernes og lærerens faglige kompetencer og adfærd samt de fysiske rammer, undervisningsmaterialet og øvrige elementer, der kan tænkes at bidrage til undervisningen. Særligt relevant skelner Brousseau mellem didaktiske og adidaktiske situationer, som henholdsvis beskriver situationer, hvor læreren agerer aktivt og styrende i modsætning til lyttende og observerende.

I Brousseaus model for beskrivelse og planlægning af undervisning indgår fem forskellige situationer, som vi her kort vil gennemgå og desuden bruge til at formidle undervisningssessionerne udarbejdet i forbindelse med dette projekt.

Devolution

Abstrakt består devolutionen i overdragelsen af ansvaret for at drive undervisningen frem fra læreren til eleven, hvor eleven accepterer ansvaret. I denne situation er det således essentielt, at læreren sikre sig, at eleverne er trygge ved det overtagne ansvar samt har forudsætningerne for at lykkes med at drive undervisningen frem.

Aktion

Abstrakt består situationen i at eleverne agerer direkte i miljøet, og den umiddelbare feedback på elevernes arbejde ligger i miljøet selv; det skal med andre ord være gennemskueligt for eleverne, om de lykkes eller må arbejde videre, ud fra det selvstændige arbejde i miljøet.

Formulering

Med udgangspunkt i aktionssituationen - og måske endda i løbet af aktionssituationen -, forklarer eleverne hinanden, hvad og hvordan de har arbejdet med miljøet og hvilke iagttagelser de har gjort sig undervejs. At sætte ord på sine handlinger og lytte til andre elevers beskrivelser kan bidrage til særligt svagere elevers sproglige kompetencer.

Validering

I denne situation skal elevernes iagttagelser og formodninger valideres; med andre ord skal situationen udmynte sig i en afklaring af, hvilke postulater er korrekte, og hvilke der skal modificeres, forbedres eller forkastes. Ideelt opnås konsensus om korrektheden af et udsagn ved diskussion blandt eleverne, mens læreren faciliterer og bidrager konstruktivt kritisk til diskussionen.

Institutionalisering

Abstrakt består situationen i at placere undervisningssessionen i en bredere kontekst af fagets metode og øvrige faglige elementer. I denne situation er det ligeledes vigtigt, at læreren præciserer og tilføjer læringspointer, som måtte være uklare indtil nu.

Teorien om didaktiske situationer er en særdeles udbredt og anerkendt tilgang til undervisning i matematik, hvorfor der er meget mere at læse og mange gode kilder. Her fremhæves i særdeleshed "*Didaktiske elementer*" af Carl Winsløw, som er fra 2006.

Kapitel 2

Tallene som Byggesten

I det følgende præsenteres en undersøgende tilgang til elementære strukturer i de hele tal. Nærmere bestemt skal vi se nærmere på, hvordan et eller flere tal kan bruges til additivt at generere nye tal - nemlig ved at lægge dem sammen. Der dukker utroligt mange fundamentale begreber og koncepter op i denne undersøgelse, herunder divisorer, indbyrdes primiske talpar, Fibonacci talfølgen. Herefter ser vi på, hvordan tal kan bruges til multiplikativt at generere nye tal - nemlig ved at gange dem sammen. Igen dukker elementære koncepter op, herunder primtal og faktorisering af heltal. Det faglige indhold orienterer sig med grundlæggende talforståelse, som kan placeres på alle niveauer.

Miljø. Lad være givet fem bunker med linjestykker af længde henholdsvis 2, 3, 4, 5 og 6 som vist herunder



Vi vil i det følgende undersøge, hvilke geometriske konstruktioner, der kan bygges heraf, særligt hvis vi begrænser os til at bygge med kun to forskellige slags linjestykker. ◦

2.1 Kernestof

Med udgangspunkt i et begrænset antal naturlige tal vil vi først undersøge, hvilke heltal man konstruere heraf ved at addere og subtrahere de i udgangspunktet givne tal et endeligt antal gange. Mere præcist introducerer vi følgende begreber.

Definition 2.1.1. Lad $a, b \in \mathbb{N}$. Vi siger, at vi kan *konstruere* $m \in \mathbb{N}_0$ ud fra $\{a, b\}$, hvis der findes $x, y \in \mathbb{N}$, så

$$m = ax + by.$$

Hvis alle på nær endeligt mange $m \in \mathbb{N}$ kan konstrueres ud fra $\{a, b\}$, da udgør $\{a, b\}$ et *additivt fundament* for $\mathbb{N}$.

Det er umiddelbart let at se, at alle talpar $\{1, a\}$ udgør et perfekt additivt fundament for $\mathbb{N}$, eftersom

$$1 = 1 \cdot 1 + a \cdot 0, \quad 2 = 1 \cdot 2 + a \cdot 0, \quad 3 = 1 \cdot 3 + a \cdot 0, \quad \dots$$

Det er imidlertid ikke alle talpar, der udgør et additivt fundament for $\mathbb{N}$, betragt eksempelvis $\{4, 6\}$. For alle $x, y \in \mathbb{N}$ haves

$$4x + 6y = 2(2x + 3y),$$

hvorfor de ulige tal *ikke* kan konstrueres af $\{4, 6\}$. Spørgsmålet som formuleret af Frobenius herunder opklarer situationen betydeligt.

Sætning 2.1.2 (Frobenius' Frimærker). Lad $a, b \in \mathbb{N}$ og antag $\gcd(a, b) = 1$. Da er

$$N = ab - a - b$$

det største positive heltal, som ikke kan konstrueres af $\{a, b\}$.

Bevis. Et generelt bevis udelades af hensyn til omfang, men vi viser resultatet for $b = a - 1$. Bemærk først, at

$$N + 1 = a(a - 1) - a - (a - 1) + 1 = a^2 - 3a + 2 = (a - 1)(a - 2)$$

kan konstrueres som vist. For $k = 0, 1, \dots, a - 2$ have

$$N + 1 + k = (a - 1)(a - 2 - k) + ak,$$

hvorfor vi har konstrueret $a - 1$ på hinanden følgende heltal. Ethvert større heltal kan således konstrueres ved at lægge $a - 1$ til et af disse tal et passende antal gange. Dette viser, at alle positive heltal større end N kan konstrueres af $\{a, a - 1\}$.

Antag nu at N faktisk kan konstrueres af $\{a, a - 1\}$. Da findes $x, y \in \mathbb{Z}$, så

$$ax + (a - 1)y = N = a(a - 1) - a - (a - 1),$$

som kan omskrives til både

$$a(x + y - a + 3) = y + 1 \quad \text{og} \quad (a - 1)(x + y - a + 2) = x + 1.$$

Af den første lighed bemærker vi, at $a \mid y + 1$, hvorfor $a \leq y + 1$, og af den anden ulighed bemærker vi $(a - 1) \mid x + 1$, hvorfor $a - 1 \leq x + 1$. Det følger således, at

$$ax + (a - 1)y \geq a(a - 2) + (a - 1)(a - 1) = 2a(a - 1) - a - (a - 1) > a(a - 1) - a - (a - 1) = N,$$

hvilket viser, at N ikke kan konstrueres ud fra $\{a, a - 1\}$. $\square$

Ovenstående diskussion af additive byggesten for $\mathbb{N}$ har naturlige udvidelser til såvel større delmængder end blot $\{a, b\}$ som til alle heltallene $\mathbb{Z}$. Udbygningen af Frobenius' Frimærker er Bezout's identitet, som er formuleret herunder, og begge resultater kan generaliseres til større delmængder af $\mathbb{N}$ eller $\mathbb{Z}$ end $\{a, b\}$.

Sætning 2.1.3 (Bezout's Identitet). Lad $a, b \in \mathbb{Z}$. Da findes $x, y \in \mathbb{Z}$, så

$$ax + by = \gcd(a, b),$$

hvor $\gcd(a, b)$ noterer den *største fælles divisor* i a, b .

Bevis. Et generelt bevis udelades af hensyn til omfang, men bemærk at specialtilfældet vist i Frobenius' Frimærker er trivielt vist ved at vælge $x = 1$ og $y = -1$. $\square$

Vi forlader nu det additive domæne og vil fokusere på de multiplikative byggesten for $\mathbb{N}$, hvor vi vil undersøge hvilke heltal man kan konstruere ved at multiplicere nogle på forhånd givne tal et endeligt antal gange. Mere præcist introducerer vi følgende begreb.

Definition 2.1.4. Lad $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{N}$. Vi siger, at vi kan *faktorisere* $m \in \mathbb{N}$ med $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, hvis der findes $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{N}_0$, så

$$m = a_1^{x_1} \cdot a_2^{x_2} \cdot \dots \cdot a_k^{x_k}.$$

Hvis alle på nær endeligt mange $m \in \mathbb{N}$ kan konstrueres ud fra $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, da udgør $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ et *multiplikativt fundament* for $\mathbb{N}$.

Det er umiddelbart let at se, at 1 ingen indflydelse har på, om en delmængde $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ er et multiplikativt fundament for $\mathbb{N}$. Det er ligeledes let at se, at ikke alle delmængder udgør et multiplikativt fundament for $\mathbb{N}$, betragt eksempelvis $\{2, 3\}$. For alle $x, y \in \mathbb{N}_0$ have, at tallene

$$2^x \cdot 3^y$$

altid ligger i 2-tabellen eller 3-tabellen (eller lig med 1), og der findes uendeligt mange naturlige tal, som ikke gør dette - betragt eksempelvis $5 + 6k$ for ethvert $k \in \mathbb{N}_0$.

Sætning 2.1.5. Lad $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{N}$. Da udgør $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ *ikke* et multiplikativt fundament for $\mathbb{N}$.

Bevis. Lad $A = a_1 a_2 \dots a_k$ og definér for $m \in \mathbb{N}$ tallene $N_m = 1 + Am$. Antag for modstrid, at N_m kan skrives som

$$1 + Am = N_m = a_1^{x_1} a_2^{x_2} \dots a_k^{x_k}, \quad x_i \in \mathbb{N}_0,$$

hvorfor vi har $a_1^{x_1} a_2^{x_2} \dots a_k^{x_k} - Am = 1$. Hvis $x_i \geq 1$ følger det således, at

$$a_i \mid (a_1^{x_1} a_2^{x_2} \dots a_k^{x_k} - Am) = 1,$$

hvorfor vi har $a_i = 1$. Hvis $x_i = 0$ får vi $a_i^{x_i} = 1$, så uanset hvilket tilfælde kan vi konkludere

$$N_m = a_1^{x_1} a_2^{x_2} \dots a_k^{x_k} = 1$$

for alle $m \in \mathbb{N}$, hvilket er en modstrid, da $A \neq 0$. □

Ikke overraskende er det netop de naturlige tal med relativt få divisorer, som er relativt svære at faktorisere i ovenstående forstand. Da ethvert tal $m \in \mathbb{N}$ har de trivielle divisorer 1 og m selv, så beskriver følgende definition netop de tal, som intuitivt er sværest at faktorisere multiplikativt.

Definition 2.1.6. Lad $p \in \mathbb{N}$. Vi siger, at p er et *primal*, hvis $p > 1$ kun har de trivielle divisorer 1 og p . Lad $\mathbb{P}$ notere mængden af alle primal.

Følgende resultat præciserer vores intuition vedrørende vanskeligheden ved at konstruere primal multiplikativt.

Lemma 2.1.7. Lad $A = \{a_1, a_2, \dots\} \subseteq \mathbb{N}$ og lad p være et primal, som ikke er indeholdt i A . Da kan p ikke faktorerises ud fra A .

Bevis. Antag for modstrid $p = a_1^{x_1} a_2^{x_2} \dots a_k^{x_k}$ for $x_i \geq 1$. Da haves $a_i \mid p$, hvorfor det følger at $a_i = 1$, eftersom p ikke er indeholdt i A . Men da fås $p = 1$, hvilket er en modstrid. □

Som en konsekvens af ovenstående resultat kan vi bemærke, at ethvert multiplikativt fundament for $\mathbb{N}$ skal indeholde samtlige primal. Vi viser nu, at primtallene udgør et multiplikativt fundament.

Theorem 2.1.8. Mængden af primal $\mathbb{P}$ er et multiplikativt fundament for $\mathbb{N}$.

Bevis. Lad $m \in \mathbb{N}$. Hvis m er et primal, så er det trivielt at konstruere m , så antag m ikke er et primal. Da findes $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, som opfylder

$$m = m_1 \cdot m_2, \quad 1 < m_1, m_2 < m.$$

Hvis m_1, m_2 er primal, så har vi konstrueret m ud fra $\mathbb{P}$ og vi er færdige, så antag uden tab af generalitet, at m_1 ikke er et primal. Da findes $m_{11}, m_{12} \in \mathbb{N}$, som opfylder

$$m_1 = m_{11} \cdot m_{12}, \quad 1 < m_{11}, m_{12} < m_1,$$

og således kan vi fortsætte så længe begge ikke er primal. Men bemærk $m > m_1 > m_{11} > \dots > 1$ naturligvis ikke kan fortsætte uendeligt, så efter et endeligt antal trin får vi nødvendigvis primal i faktorisering. Dette viser, at ethvert naturligt tal m kan konstrueres ud fra primtallene.

Et mere formelt argument ville kræve et induktionsbevis, som vi ikke giver her. □

Ovenstående resultat er del af den elementære talteori's vigtigste resultat, nemlig Aritmetikkens Fundamentalsætning. Ikke nok med at alle tal kan skrives som et produkt af primal, så er denne faktorisering faktisk entydig op til rækkefølgen af faktorerne!

2.2 Perspektivering: Rekursive talfølger og Fibonacci talfølge

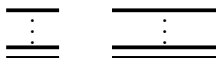
Når vi har set, at alle talpar $\{a, b\}$, hvor $\gcd(a, b) = 1$, udgør et additivt fundament for $\mathbb{N}$, er det naturligt at spørge, på *hvor mange* forskellige måder et givet tal kan konstrueres. For at bevare forbindelsen til det fysiske miljø bestående af linjestykker af forskellige længder (se video), vil vi undersøge følgende beslægtede spørgsmål: På hvor mange forskellige måder kan et linjestykke af længde $m \in \mathbb{N}$ konstrueres ud fra linjestykker af længde $a, b \in \mathbb{N}$, hvor rækkefølgen af linjestykkerne har betydning? Lad N_m notere dette antal, og bemærk at vi eksempelvis for $a = 2$ og $b = 3$ har

$$N_0 = 1, \quad N_1 = 0, \quad N_2 = 1, \quad N_3 = 1, \quad N_4 = 1, \quad N_5 = 2, \quad N_6 = 2, \quad N_7 = 3, \quad N_8 = 4, \quad \dots$$

Vi indfører desuden konventionen $N_{-m} = 0$ for alle $m \in \mathbb{N}$ og $N_0 = 1$.

For at gøre det lettere for os selv i første omgang, lad os betragte linjestykker af længde 1 og 2.

Problem 2.2.1. Lad være givet linjestykker af længde 1 og 2 som vist herunder



Vi vil i det følgende undersøge på *hvor mange* forskellige måder, ethvert givet linjestykke kan bygges.

Ved at prøve os frem opdager vi, at man kan bygge et linjestykke af længde n på følgende antal forskellige måder.

Længde n	0	1	2	3	4	5	6	7
Antal måder	1	1	2	3	5	8	13	21

Vi genkender ovenstående følge som Fibonacci talfølgen, som lægger op til følgende resultat.

Sætning 2.2.2. Lad F_n notere antallet af måder, hvorpå man kan bygge et linjestykke af længde n af mindre linjestykker af længde 1 og 2. Da gælder

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Bevis. De forskellige måder, hvorpå man kan bygge et linjestykke af længde n , kan inddeles i to grupper:

- 1) Alle måder, hvor det sidste lille linjestykke har længde 1.
- 2) Alle måder, hvor det sidste lille linjestykke har længde 2.

Tilsammen udgør de to grupper samtlige måder at bygge et linjestykke af længde n på, og der er intet overlap. Bemærk nu, at antallet af måder man kan bygge linjestykket af længde n , hvor det sidste linjestykke har længde 1, er det samme som antallet af måder man kan bygge linjestykket af længde $n - 1$, altså F_{n-1} . Tilsvarende er antallet af måder man kan bygge linjestykket af længde n , hvor det sidste linjestykke har længde 2, det samme som antallet af måder man kan bygge linjestykket af længde $n - 2$, altså F_{n-2} . Da de to grupper tilsammen udgør samtlige måder at bygge et linjestykke af længde n på, og der intet overlap er, må der gælde

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

hvilket er det ønskede. □

Vi har nu undersøgt på hvor mange forskellige måder, man kan bygge et linjestykke af længde n , med linjestykker af længde 1 og 2; det er naturligt at undersøge samme spørgsmål for linjestykker af andre længder.

Sætning 2.2.3 (Fibonacci tal). Lad $a, b \in \mathbb{N}$ og lad for ethvert $m \in \mathbb{N}$ tallet N_m notere antallet af måder, hvorpå et linjestykke af længde m kan konstrueres af linjestykker af længde a, b , hvor rækkefølgen har betydning. Da gælder

$$N_m = N_{m-a} + N_{m-b}$$

Bevis. Enhver konstruktion af et linjestykke af længde m afsluttes af et linjestykke af længde a eller et linjestykke af længde b , og der er intet overlap mellem disse. Antallet linjestykker af længde m , der ender på et linjestykke af længde a , er netop N_{m-a} , mens antallet af linjestykker af længde m , der ender på et linjestykke af længde b , er netop N_{m-b} . Det følger således, at $N_m = N_{m-a} + N_{m-b}$ □

Bemærk at egenskaben vi viser herover har mange fællestræk med den definerende egenskab for Fibonacci talfølgen; faktisk er antallet af måder, hvorpå man kan konstruere et linjestykke af længde m af linjestykker af længde 1, 2 netop det m 'te Fibonacci-tal! En lukket formel for N_m ville naturligvis være ønskværdig, men de eneste kendte forslag hertil involverer komplekse tal.

2.2.1 Perspektivering: Effektiv konstruktion af nye linjestykker

Med en fornuftig beskrivelse af antallet af måder, hvorpå man kan konstruere et linjestykke af længde m ud fra linjestykker af længde a, b , er et naturligt at spørge, hvordan man konstruerer m mest effektivt; nærmere bestemt spørger vi, hvad er det færrest mulige antal a 'er og b 'er vi skal bruge for at konstruere m . Lad K_m notere dette antal, og bemærk at vi eksempelvis for $a = 2$ og $b = 3$ har

$$K_0 = 0, \quad K_1 = \infty, \quad K_2 = 1, \quad K_3 = 1, \quad K_4 = 2, \quad K_5 = 2, \quad K_6 = 2, \quad K_7 = 3, \quad K_8 = 3, \quad \dots,$$

hvor vi har indført konventionen $K_m = \infty$, hvis m ikke kan konstrueres af $\{a, b\}$.

Sætning 2.2.4. Lad $a, b \in \mathbb{N}$ og lad for ethvert $m \in \mathbb{N}$ tallet K_m notere det mindste antal af linjestykker af længde a, b , som er tilstrækkeligt for at bygge et linjestykke af længde m . Da gælder

$$K_m = \min(K_{m-a}, K_{m-b}) + 1$$

Bevis. Det er klart, at hvis man kan konstruere $m - a$ af K_{m-a} linjestykker af længde a og b , så kan man konstruere m ved at tilføje ét a og dermed totalt bruge $K_{m-a} + 1$ linjestykker. Et tilsvarende argument viser, at man kan konstruere m med i alt $K_{m-b} + 1$ linjestykker, hvorfor vi konkluderer

$$K_m \leq \min(K_{m-a}, K_{m-b}) + 1$$

Hvis man modsat konstruerer m med i alt K_m linjestykker af længde a og b , så kan man fjerne et linjestykke af a eller b og dermed opnå et linjestykke af længde $m - a$ eller $m - b$ konstrueret af i alt $K_m - 1$ linjestykker af længde a og b . Dette viser $K_{m-a} \leq K_m - 1$ eller $K_{m-b} \leq K_m - 1$, så specielt haves

$$\min(K_{m-a}, K_{m-b}) + 1 \leq K_m,$$

hvilket viser det ønskede. □

At bestemme det mindste antal linjestykker af længder a, b , der skal til for at konstruere et linjestykke af længde m , altså at K_m , svarer til at løse minimeringsproblemet

$$K_m = \min \{x + y \mid ax + by = m, \text{ hvor } x, y \in \mathbb{Z}\}.$$

Et skridt på vejen i den retning er faktisk at bestemme samtlige løsninger til ligningen $ax + by = m$, som vi gør med resultatet herunder.

Sætning 2.2.5. Lad $a, b \in \mathbb{Z}$ og lad $m \in \mathbb{N}$. Hvis $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ er en løsning til ligningen

$$ax + by = m,$$

så kan alle øvrige løsninger $x_k, y_k \in \mathbb{Z}$ skrives på formen

$$x_k = x_0 + k \frac{b}{\gcd(a, b)}, \quad y_k = y_0 - k \frac{a}{\gcd(a, b)}.$$

for $k \in \mathbb{Z}$.

Bevis. Antag først $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ er en løsning, og lad x_k, y_k være givet som herover. Da haves

$$ax_k + by_k = ax_0 + k \frac{ab}{\gcd(a, b)} + by_0 - k \frac{ab}{\gcd(a, b)} = ax_0 + by_0 = m,$$

hvilket viser x_k, y_k er en løsning.

Antag nu $x, y \in \mathbb{Z}$ er en løsning til ligningen. Da haves

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = ax + by - (ax_0 + by_0) = m - m = 0,$$

hvorfor vi har $b \mid a(x - x_0)$ og $a \mid b(y - y_0)$. Det følger da, at

$$\frac{b}{\gcd(a, b)} \mid (x - x_0), \quad \frac{a}{\gcd(a, b)} \mid (y - y_0),$$

hvorfor vi har $x - x_0 = k \frac{b}{\gcd(a, b)}$ og $y - y_0 = l \frac{a}{\gcd(a, b)}$ for $k, l \in \mathbb{Z}$. Vender vi tilbage til første udregning, får vi

$$k \frac{ab}{\gcd(a, b)} + l \frac{ab}{\gcd(a, b)} = 0,$$

hvorfor vi har $l = -k$, hvilket viser det ønskede. □

Korollar 2.2.6. Lad $a, b \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ og antag $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ er en løsning til ligningen

$$ax + by = m.$$

Hvis $a \geq b$, så er

$$K_m = x_0 + y_0 - \left\lfloor \frac{y_0 \gcd(a, b)}{a} \right\rfloor \cdot \frac{a - b}{\gcd(a, b)}.$$

Bevis. Lad $x_k, y_k \in \mathbb{Z}$ være en løsning til ligningen $ax + by = m$. Da haves af Sætning 2.2.5, at

$$x_k + y_k = x_0 + y_0 - k \cdot \frac{a - b}{\gcd(a, b)},$$

Vi skal således vælge $k \in \mathbb{Z}$ størst muligt, hvor vi endnu har $x_k, y_k \geq 0$, altså

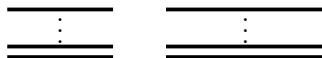
$$x_k = x_0 + k \frac{b}{\gcd(a, b)} \geq 0, \quad y_k = y_0 - k \frac{a}{\gcd(a, b)} \geq 0.$$

Dette $k \in \mathbb{N}$ er givet ved $k = \left\lfloor \frac{y_0 \gcd(a, b)}{a} \right\rfloor$, hvilket viser det ønskede. □

2.2.2 Perspektivering: Primal og Aritmetikkens Fundamentalsætning

Vi arbejder videre fra resultatet, at alle linjestykker af længde større end 1 kan bygges med linjestykker af længde 2 og 3, og undersøger følgende problem.

Problem 2.2.7. Lad være givet linjestykker af længde 2 og 3 som vist herunder



Vi vil i det følgende undersøge, hvilke rektangler med et givet areal, der kan bygges heraf.

Ved at prøve os frem opdager vi, at man kan bygge rektangler med følgende arealer

4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, ...

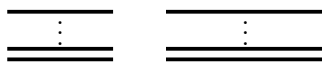
eller med andre ord, at man *ikke* kan bygge rektangler med følgende arealer: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ... Dette giver anledning til følgende definition.

Definition 2.2.8. Lad n være et positivt helt tal. Vi siger, at n er et *sammensat tal*, hvis det kan bygges som arealet af et rektangel, hvor vi bruger kombinationer af linjestykker af længde 2 og 3 som sidelængder.

Vi siger, at n er et *primaltal*, hvis det ikke er et sammensat tal.

Vi har nu bygget linjestykker af forskellige længder, og dernæst rektangler med forskellige arealer. Vi fortsætter i samme tråd og undersøger følgende problem.

Problem 2.2.9. Lad være givet linjestykker af længde 2 og 3 som vist herunder



Vi vil i det følgende undersøge, hvilke kasser med et givet rumfang, der kan bygges heraf.

Ved at prøve os frem opdager vi, at man kan bygge kasser med følgende rumfang

8, 12, 16, 18, 20, ...

eller med andre ord, at man *ikke* kan bygge rektangler med følgende arealer:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 19, 21, ...

Dette giver anledning til følgende definition.

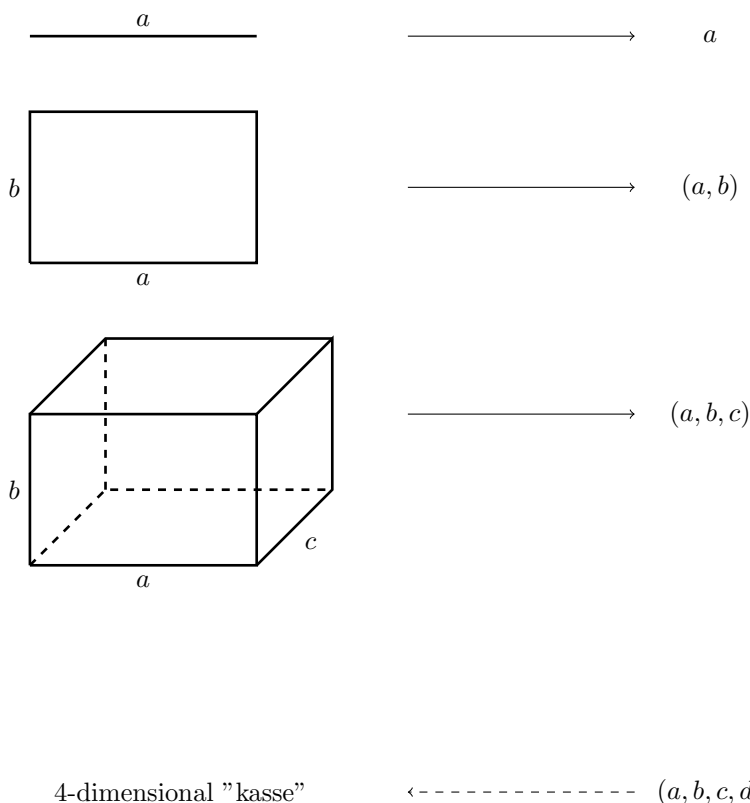
Definition 2.2.10. Lad n være et positivt helt tal. Vi siger, at n er et *3-sammensat tal*, hvis det kan bygges som rumfanget af en kasse, hvor vi bruger kombinationer af linjestykker af længde 2 og 3 som sidelængder.

Vi siger, at n er et *semiprimaltal*, hvis det ikke er et 3-sammensat tal.

Vi har nu bygget linjestykker af forskellige længder, rektangler med forskellige arealer og endelig kasser med forskellige rumfang. Kunne man fortsætte i samme tråd? Vi undersøger følgende spørgsmål.

- Kan man bygge en "kasse" i fire dimensioner?
- Hvordan udregner man "volumen" af en "kasse" i fire dimensioner?
- Kan man bygge en "kasse" i fem, seks, syv og så videre dimensioner?
- Hvordan udregner man "volumen" af en "kasse" i fem, seks, syv og så videre dimensioner?
- Kan man bygge "kasser" i alle dimensioner?
- Findes der nogle tal, så man kan bygge en "kasse" med netop det "rumfang" i alle dimensioner?

Efter diskussion finder vi frem til følgende generalisering



Dette giver anledning til følgende definition.

Definition 2.2.11. En d -dimensional kasse identificeres med d sidelængder, og *volumen* heraf udregnes som produktet af de d sidelængder.

Spørgsmålet om, hvorvidt der findes tal, som optræder som "rumfang" af "kasser" i alle dimensioner har følgende svar.

Theorem 2.2.12. Der findes ingen tal, hvor man kan bygge en "kasse" med netop det "rumfang" i alle dimensioner.

Bevis. Lad n være et tal, der kan bygges som "rumfanget" af en "kasse" i d dimensioner. Da er

$$n = a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_d,$$

hvor a_i er sidelængderne på den d -dimensionale "kasse" med "rumfang" n . Da alle sidelængder er større end eller lig med 2, må der gælde $n \geq 2^d$. Dette kan ikke lade sig gøre for alle d , hvorfor der findes en dimension, hvor man ikke kan bygge en "kasse" med "rumfang" n . $\square$

2.2.3 Perspektivering: Bezout's Identitet

Vi arbejder videre fra observationen, at i mange tilfælde kan man bygge alle linjestykker af længde større end en vis grænse.

Problem 2.2.13. Lad være givet fem bunker med linjestykker af længde henholdsvis 2, 3, 4, 5 og 6 som vist herunder



Vi undersøger, hvilke forskellige længder af linjestykker kan bygges af to givne bunker, hvis man nu må bygge i *begge retninger*, eksempelvis kan vi bygge et linjestykke af længde 2 med linjestykker af længde 3 og 5 som vist herunder.



Ved at prøve os frem opdager vi, at man kan bygge følgende linjestykker ved at lægge eksisterende linjestykker i forlængelse eller modsatrettet af hinanden.

	2	3	4	5	6
2	2,4,6,...	1,2,3,...	2,4,6,...	1,2,3,...	2,4,6,...
3	-	3,6,9,...	1,2,3,...	1,2,3,...	3,6,9,...
4	-	-	4,8,12,...	1,2,3,...	2,4,6,...
5	-	-	-	5,10,15,...	1,2,3,...
6	-	-	-	-	6,12,18,...

På baggrund af ovenstående formulerer vi følgende resultat.

Theorem 2.2.14 (Bezout's Identitet). Lad m, n være positive hele tal. Hvis $\gcd(m, n) = 1$, så kan alle linjestykker bygges ved at lægge linjestykker i forlængelse eller modsatrettet af hinanden.

Bevis. Beviset kræver Euklid's Algoritme og udelades af hensyn til omfang. $\square$

Kapitel 3

Fundamental Aritmetik

I det følgende præsenteres en undersøgende tilgang til elementære operationer på de hele tal. Nærmere bestemt vil vi tage udgangspunkt i fundamentale egenskaber ved addition på de hele tal, for derefter kort at diskutere multiplikation. Helt centralt for undervisningsmaterialet er introduktionen af potensudtryk og potensregneregler, og i halen stiller vi det oplagte spørgsmål: Hvis multiplikation kan forstås som gentagen addition, og eksponentiering kan forstås som gentagen multiplikation, findes der så en operation, der kan forstås som gentagen eksponentiering - og hvorfor har jeg aldrig hørt om den? Det fagelige indhold orienterer sig mod grundlæggende algebraisk forståelse af operationer på tal, og placeres naturligt i l.g., som et dels repeterende, dels undersøgende forløb om potensregning.

Vi vil i det følgende forudsætte, at læseren er bekendt med *associativitet* og *kommutativitet* for addition af hele tal, altså

$$a + (b + c) = (a + b) + c, \quad a + b = b + a$$

for alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Desuden forudsættes bekendtheden med subtraktion og forståelse af subtraktion som invers til addition.

3.1 Kernestof

For fuldstændighed og klarhed af den røde tråd introduceres multiplikation med hele tal som gentagen addition, hvilket er præciseret herunder.

Definition 3.1.1. Lad $a \in \mathbb{Z}$ og $m \in \mathbb{N}$. Da defineres *multiplikation* $\cdot$ ved

$$a \cdot m := \underbrace{a + a + \dots + a}_{m \text{ gange}}, \quad a \cdot 0 := 0, \quad \text{og} \quad a \cdot (-m) := -\underbrace{(a + a + \dots + a)}_{m \text{ gange}} = -a \cdot m$$

For $m \in \mathbb{Z}$ indfører vi konventionen, at

$$\underbrace{a + a + \dots + a}_{m \text{ gange}} := \text{sign}(m) \underbrace{(a + a + \dots + a)}_{|m| \text{ gange}}, \quad \text{sign}(m) := \begin{cases} 1, & \text{hvis } m > 0, \\ 0, & \text{hvis } m = 0, \\ -1, & \text{hvis } m < 0 \end{cases}$$

som betyder, at vi kan definere $a \cdot m := \underbrace{a + a + \dots + a}_{m \text{ gange}}$ for alle $m \in \mathbb{Z}$.

For at forsimple mere komplekse udregninger indfører vi det sædvanlige regnehierarki, så for $a, b \in \mathbb{Z}$ og $m, n \in \mathbb{Z}$ defineres

$$a \cdot m + b \cdot n := (a \cdot m) + (b \cdot n),$$

så vi med andre ord multiplicerer *før* vi adderer.

Vi fortsætter i samme spor og introducerer følgende genkendelige regneregler, som beskriver samspillet mellem operationerne $+$ og $\cdot$ i de hele tal. Læseren opfordres til at lægge særligt mærke til den principielle nødvendighed af et bevis samt udformningen af samme for følgende resultat.

Sætning 3.1.2. Lad $a, b \in \mathbb{Z}$ og $m, n \in \mathbb{Z}$. Da gælder

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & a \cdot m + a \cdot n = a \cdot (m + n). & \text{c)} & a \cdot m + b \cdot m = (a + b) \cdot m. & \text{e)} & (a \cdot m) \cdot n = a \cdot (m \cdot n). \\ \text{b)} & a \cdot m - a \cdot n = a \cdot (m - n). & \text{d)} & a \cdot m - b \cdot m = (a - b) \cdot m. & \text{f)} & m \cdot n = n \cdot m. \end{array}$$

Bevis for a). Lad $a \in \mathbb{Z}$ og $m, n \in \mathbb{N}$. Da haves

$$a \cdot m + a \cdot n = \underbrace{a + a + \dots + a}_m + \underbrace{a + a + \dots + a}_n = \underbrace{a + a + \dots + a}_{m+n} = a \cdot (m + n),$$

hvor første og sidste lighedstegn følger af definitionen af multiplikation.

Da samtlige punkter a)-f) har ensartede beviser udelades disse fra noten her. $\square$

Parallelt til introduktionen af multiplikation som gentagen addition vil vi nu indføre eksponering af heltal som gentagen multiplikation, hvilket er præciseret i definitionen herunder.

Definition 3.1.3. Lad $a \in \mathbb{Z}$ og $m \in \mathbb{N}$. Da defineres *eksponering* $\wedge$ ved

$$a \wedge m := \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_m,$$

og for $a \neq 0$ defineres desuden

$$a \wedge 0 := 1, \quad \text{og} \quad a \wedge (-m) := \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_m} = \frac{1}{a \wedge m}$$

Vi kalder a for *grundtallet*, m for *eksponenten* og hele udtrykket $a \wedge m$ for en *potens*.

Med mildt misbrug af notationen indfører vi indfører vi konventionen, at for alle $m \in \mathbb{Z}$ haves

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_m := \left(\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{|m|} \right)^{\text{sign}(m)},$$

hvor $x^1 = x$, $x^0 = 1$ og $x^{-1} = \frac{1}{x}$. Det betyder, at vi kan skrive $a \wedge m = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_m$ for alle $m \in \mathbb{Z}$.

Igen for at forsimpler mere komplekse udregninger udbygger vi det sædvanlige regnehierarki, så for $a, b \in \mathbb{Z}$ og $m, n \in \mathbb{Z}$ defineres

$$a \wedge m + b \wedge n := (a \wedge m) + (b \wedge n), \quad a \wedge m \cdot b \wedge n := (a \wedge m) \cdot (b \wedge n),$$

så vi med andre ord eksponerer vi *før* vi adderer og multiplicerer.

Inspireret af vores tidligere etablerede regneregler, som beskriver samspillet mellem addition og multiplikation, formulerer og beviser vi nu følgende regneregler, som beskriver samspillet mellem multiplikation og eksponering. Læserens opmærksomhed henledes på den slående lighed mellem beviserne for Sætning 3.1.2 og Sætning 3.1.4.

Sætning 3.1.4. Lad $a, b \in \mathbb{Z}$ og $m, n \in \mathbb{Z}$. Da gælder

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & a \wedge m \cdot a \wedge n = a \wedge (m + n). & \text{c)} & a \wedge m \cdot b \wedge m = (a \cdot b) \wedge m. & \text{e)} & (a \wedge m) \wedge n = a \wedge (m \cdot n). \\ \text{b)} & \frac{a \wedge m}{a \wedge n} = a \wedge (m - n). & \text{d)} & \frac{a \wedge m}{b \wedge m} = \left(\frac{a}{b} \right) \wedge m. \end{array}$$

hvor b) og d) forudsætter $b \neq 0$.

Bevis for a). Lad $a \in \mathbb{Z}$ og $m, n \in \mathbb{Z}$. Da haves

$$a \wedge m \cdot a \wedge n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_m \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m+n} = a \wedge (m+n),$$

hvor første og sidste lighedstegn følger af definitionen af eksponering. $\square$

Indtil nu har vi brugt en utraditionel notation for at understrege, at eksponering er en operation, som konstrueres fra multiplikation helt analogt til hvordan multiplikation konstrueres fra addition. Symbolet for multiplikation $\cdot$ undertrykkes ofte i matematiske udsagn; vi taler om et underforstået multiplikationssymbol, så $ab := a \cdot b$ for alle $a, b \in \mathbb{Z}$. Tilsvarende undertrykkes symbolet for eksponering $\wedge$ på følgende vis.

Notation 3.1.5. Lad $a, m \in \mathbb{Z}$. Da noteres eksponering ved

$$a^m := a \wedge m$$

hvor a er *grundtallet*, m er *eksponenten* og udtrykket a^m kaldes en *potens*.

Til fremtidig reference reformulerer vi indholdet af Sætning 3.1.4 herunder udtrykt i den traditionelle notation.

Sætning 3.1.6. Lad $a, b \in \mathbb{Z}$ og $m, n \in \mathbb{Z}$. Da gælder

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & a^m \cdot a^n = a^{m+n}. & \text{c)} & a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m. & \text{e)} & (a^m)^n = a^{m \cdot n}. \\ \text{b)} & \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}. & \text{d)} & \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m. & & \end{array}$$

hvor b) og d) forudsætter henholdsvis $a \neq 0$ og $b \neq 0$.

3.1.1 Persepektivering: Knuth's pil op $\uparrow$

Vi så først, hvordan multiplikation kan defineres som gentagen addition, hvorefter vi definerede eksponering som gentagen multiplikation. I naturlig forlængelse heraf undersøger vi nu definitionen af en operation, der noterer gentagen eksponering. Vi bemærker dog først, at eksponering $\wedge$ *ikke* er associativ, altså at ligheden

$$(a \wedge m) \wedge n \stackrel{?}{=} a \wedge (m \wedge n), \quad a, m, n \in \mathbb{Z}$$

ikke gælder generelt, se eventuelt Sætning 3.1.4e), hvorfor parenteserne i følgende udsagn er nødvendige for at sikre definitionens entydighed.

Definition 3.1.7. Lad $a \in \mathbb{Z}$ og $m \in \mathbb{N}$. Da defineres *Knuth's pil op* $\uparrow$ ved

$$a \uparrow m := \underbrace{a \wedge (a \wedge (\dots \wedge a))}_m.$$

Bemærkning. Vi definerer ikke Knuth's pil op for $m \in \mathbb{Z}$, da en sådan udvidelse faktisk ikke er kendt.

Det er centralt at bemærke, at fordi $\wedge$ ikke er associativ, så er vi nødt til at udføre operationerne i en bestemt rækkefølge angivet af placeringen af parenteser. Det betyder også, at vi ikke kan udlede regneregler for samspillet mellem $\uparrow$ og $\wedge$, eksempelvis har vi

$$a \uparrow m \wedge a \uparrow n = \underbrace{(a \wedge (a \wedge (\dots \wedge a)))}_m \wedge \underbrace{(a \wedge (a \wedge (\dots \wedge a)))}_n \stackrel{?}{=} \underbrace{(a \wedge (a \wedge (\dots \wedge a)))}_{m \star n} = a \uparrow (m \star n),$$

hvor $\star$ er en pladsholder for $+$, $\cdot$ eller $\wedge$, men uanset hvad ville ligheden ikke gælde generelt. Intuitionen er således, at eftersom vi i definitionen af $\uparrow$

3.1.2 Persepektivering: Generalisering til de Rationale Tal $\mathbb{Q}$

For fuldstændighed og klarhed af den røde tråd introduceres først division som den inverse operation til multiplikation, hvilket er præciseret i definitionen herunder.

Definition 3.1.8. Lad $a, b \in \mathbb{Z}$. Da defineres *division* $/$ ved

$$a/b := a \cdot \frac{1}{b},$$

hvor $\frac{1}{b} \in \mathbb{Q}$ noterer det tal, som opfylder $b \cdot \frac{1}{b} = 1$ for $b \in \mathbb{Z}$. Eksistens og entydighed af et sådant tal vil vi ikke diskutere nærmere her.

Med observationen at subtraktion og division som operationer er modsætninger til henholdsvis addition og multiplikation, vil vi motivere definitionen af m 'te rødder som modsætning til m 'te potens.

Definition 3.1.9. Lad $a \in \mathbb{Q}_+$ og $m \in \mathbb{N}$. Da er den m 'te rod af a , noteret $\sqrt[m]{a}$, det positive tal, som opfylder

$$(\sqrt[m]{a})^m = a$$

Eksistens og entydighed af den m 'te rod af a nævnes uden bevis, dog kan særligt entydighed retfærdiggøres med et argument som følgende. Lad $a, b \in \mathbb{Q}_+$ og $m \in \mathbb{N}$. Da haves

$$a^m = b^m \Leftrightarrow \frac{a^m}{b^m} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^m = 1 \stackrel{(\dagger)}{\Leftrightarrow} \frac{a}{b} = 1 \Leftrightarrow a = b$$

hvor vi postulerer, at det eneste positive tal multipliceret med sig selv m gange, der giver 1, er tallet 1 selv. Eksistens af m 'te rødder kræver en grundig introduktion af reelle tal, som vi på ingen måde forudsætter her. Vi viser nu, at den m 'te rod faktisk er modsætning til m 'te potens.

Sætning 3.1.10. Lad $a \in \mathbb{Q}_+$ og $m \in \mathbb{N}$. Da gælder

$$\sqrt[m]{a^m} = a = (\sqrt[m]{a})^m$$

Bevis. Vi udnytter først definitionen af den m 'te rod, hvilket efterfølges af elementære omskrivninger.

$$\left(\sqrt[m]{a^m}\right)^m = a^m \Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt[m]{a^m}\right)^m}{a^m} = 1 \stackrel{(\dagger)}{\Leftrightarrow} \left(\frac{\sqrt[m]{a^m}}{a}\right)^m = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt[m]{a^m}}{a} = 1 \Leftrightarrow \sqrt[m]{a^m} = a$$

hvor $(\dagger)$ gør brug af Sætning 3.1.6(4)¹. Dette viser den første lighed, mens den anden lighed ganske simpelt følger af definitionen af den m 'te rod. $\square$

Vi fortsætter den pedantiske grundighed med definitionen af multiplikation med et rationalt tal, igen for at sikre den røde tråd.

Definition 3.1.11. Lad $a \in \mathbb{Q}$, $m \in \mathbb{Z}$ og $n \in \mathbb{N}$. Da defineres *multiplikation* $\cdot$ ved

$$a \cdot \frac{m}{n} := \frac{a \cdot m}{n}$$

Vi bemærker således, at multiplikation med et rationalt tal er defineret som sædvanlig multiplikation med tælleren efterfulgt af division med nævneren.

Med henvisning til ovenstående defineres eksponering med rationale tal.

Definition 3.1.12. Lad $a \in \mathbb{Q}_+$, $m \in \mathbb{Z}$ og $n \in \mathbb{N}$. Da defineres *eksponering* ved

$$a^{m/n} := \sqrt[n]{a^m}$$

¹Principielt er argumentet ugyldigt, da vi ikke ved at $\sqrt[n]{a^m}$ er et rationalt tal.

På samme måde som med multiplikation er eksponering med et rationalt tal blot den sædvanlige eksponering med tælleren efterfulgt af den modsatte operation med nævneren, nemlig at tage den n 'te rod.

Vi så tidligere, at eksponering med hele tal opfylder en række regneregler. Da vi nu har udviddet definitionen til at dække eksponering med rationale tal, er vi nødt til at bevise disse regneregler i det generelle tilfælde. For at understrege de tekniske krav til et sådant bevis, bemærker vi at den viste regneregler er det simpleste tilfælde, og selv her er der skridt, vi ikke kan argumentere for fyldestgørende.

Sætning 3.1.13. Lad $a, b \in \mathbb{Q}$ og $m, n \in \mathbb{Q}$. Da gælder

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & a^m \cdot a^n = a^{m+n}. & \text{c)} & a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m. & \text{e)} & (a^m)^n = a^{m \cdot n}. \\ \text{b)} & \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}. & \text{d)} & \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m. & & \end{array}$$

Bevis for c). Lad $m \in \mathbb{Q}$ og $p \in \mathbb{Z}$ og $q \in \mathbb{N}$, så $m = p/q$. Da haves for $a, b \in \mathbb{Q}$, at

$$a^m \cdot b^m = a^{p/q} \cdot b^{p/q} = (\sqrt[q]{a})^p (\sqrt[q]{b})^p \stackrel{(\dagger_1)}{=} (\sqrt[q]{a} \cdot \sqrt[q]{b})^p \stackrel{(\dagger_2)}{=} (\sqrt[q]{a \cdot b})^p = (a \cdot b)^{p/q} = (a \cdot b)^m,$$

hvor $(\dagger_1)$ kræver generaliseringen af Sætning 3.1.6(c) for $a, b \in \mathbb{R}$, hvilket vi ikke har vist (og end ikke defineret - overvej, hvad det egentlig sige at multiplicere reelle tal?). Ligheden markeret med $(\dagger_2)$ følger, da der findes netop ét tal, som opløftet i q 'te potens giver ab , nemlig $\sqrt[q]{ab}$ og da

$$\left(\sqrt[q]{a} \sqrt[q]{b}\right)^q = \sqrt[q]{a}^q \cdot \sqrt[q]{b}^q = ab,$$

så kan vi konkludere $\sqrt[q]{a} \sqrt[q]{b} = \sqrt[q]{ab}$. □

Kapitel 4

Klassifikation af Funktionstyper

I det følgende præsenteres en undersøgende tilgang til introduktionen af funktioner og klassifikation af funktionstyper i gymnasiet. Først overvejer vi bredt, hvordan man kan klassificere funktioner, og her er uanede muligheder, men efter en mere præcis og grundig overvejelse drejes diskussionen i retning af den konventionelle klassifikation af funktioner i lineære funktioner, polynomier, potensfunktioner og eksponentielle udviklinger.

4.1 Kernestof

Vi indleder med at introducere et matematisk begreb, som formaliserer den intuitive fornemmelse af en proces, som givet et input producerer et output.

Definition 4.1.1. En funktion fra en mængde X til en mængde Y noteres $f: X \rightarrow Y$ og associerer til hvert element $x \in X$ netop ét element $y \in Y$. Vi skriver $y = f(x)$.

Vi siger, at X er *definitionsmængden* for f , mens Y er *codomænet*. *Værdimængden* for f noteres $V(f)$ og er givet ved

$$V(f) := \{y \in Y \mid \exists x \in X: f(x) = y\}.$$

I det følgende skal vi udelukkende fokusere på funktioner $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eller $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$. Disse funktioner har nemlig en naturlig grafisk fortolkning, hvor vi til hvert element $x \in X$ indtegner punktet $(x, f(x))$ i et koordinatsystem. Mængden af punkter

$$G(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$$

kaldes *grafen* for f . Vi skal udnytte denne visualisering til at kaste lys over begrebet 'funktion', når vi begrænser os til funktioner defineret over de reelle tal. Før du læser videre opfordres du til at kaste et blik på de skitserede grafer i bilaget til dette kapitel.

4.1.1 Klassifikation af funktioner på baggrund af graf

Lad $X \subseteq \mathbb{R}$ og betragt en funktion $f: X \rightarrow \mathbb{R}$.

- Vi siger, at f er henholdsvis *voksende* eller *strengt voksende*, hvis

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2), \quad \text{eller} \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

for alle $x_1, x_2 \in X$. Vi siger, at f er henholdsvis *aftagende* eller *strengt aftagende*, hvis

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2), \quad \text{eller} \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

for alle $x_1, x_2 \in X$. Vi siger, at f er (*strengt*) *monoton*, hvis f er (strengt) voksende eller aftagende.

- Vi siger, at f er en *konveks* funktion, hvis

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)x) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(x)$$

for alle $x \in X$ og $\lambda \in [0, 1]$.

Vi siger, at f er en *konkav* funktion, hvis

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)x) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(x)$$

for alle $x \in X$ og $\lambda \in [0, 1]$.

- Vi siger, at f er henholdsvis *ikke-negativ* eller *positiv*, hvis

$$f(x) \geq 0, \quad \text{eller} \quad f(x) > 0$$

for alle $x \in X$.

Vi siger, at f er henholdsvis *ikke-positiv* eller *negativ*, hvis

$$f(x) \leq 0, \quad \text{eller} \quad f(x) < 0$$

for alle $x \in X$.

- Betragt en funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Vi siger, at f er henholdsvis *symmetrisk* eller *antisymmetrisk* omkring akse $x = s$, hvis

$$f(s - x) = f(s + x) \quad \text{eller} \quad f(s - x) = -f(s + x)$$

for alle $x \in \mathbb{R}$.

- Vi siger, at f er henholdsvis *opad begrænset* eller *nedad begrænset*, hvis der findes $M \in \mathbb{N}$ eller $m \in \mathbb{N}$, så

$$f(x) \leq M \quad \text{eller} \quad f(x) \geq m$$

for alle $x \in X$. Vi siger, at f er *begrænset*, hvis f er både opad og nedad begrænset.

- Vi siger, at f er *injektiv*, hvis der for ethvert $y \in \mathbb{R}$ findes højst ét $x \in X$, så $f(x) = y$. Med andre ord haves

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

for alle $x_1, x_2 \in X$. Vi siger, at f er *surjektiv*, hvis der for ethvert $y \in \mathbb{R}$ findes mindst ét $x \in X$, så $f(x) = y$.

Vi siger, at f er *bijektiv*, hvis der for ethvert $y \in \mathbb{R}$ findes netop ét $x \in X$, så $f(x) = y$. Bemærk at f er bijektiv, hvis og kun hvis f er *invertibel*, altså hvis og kun hvis der findes en funktion $g: \mathbb{R} \rightarrow X$, som opfylder

$$(g \circ f)(x) = x, \quad (f \circ g)(y) = y.$$

Vi siger, at g er den *inverse af* f , som noteres f^{-1} .

4.1.2 Klassifikation af funktioner på baggrund af forskrift

Typisk er funktioner $f: X \rightarrow Y$ angivet med en *forskrift*, som beskriver hvordan elementer fra X associeres til elementer i Y .

Definition 4.1.2. Vi indfører følgende typer af funktioner.

- Vi siger, at $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er en *konstant funktion*, hvis der findes $b \in \mathbb{R}$, så

$$f(x) = b$$

for alle $x \in \mathbb{R}$. Vi siger, at b er *begyndelsesværdien* for f .

- Vi siger, at $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er en *lineær funktion*, hvis der findes $a \in \mathbb{R}$, så

$$f(x) = ax$$

for alle $x \in \mathbb{R}$. Vi siger, at a er *hældningskoefficienten* for f .

- Vi siger, at $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er et *polynomium af grad* $n \in \mathbb{N}_0$, hvis der findes $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, så

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

for alle $x \in \mathbb{R}$. Vi siger, at a_i er den *i'te grads koefficient*.

- Vi siger, at $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ er en *potensfunktion*, hvis der findes $a \in \mathbb{R}$ og $b \in \mathbb{R}_+$, så

$$f(x) = b \cdot x^a$$

for alle $x \in \mathbb{R}$. Vi siger, at a er *potensen*, mens der ikke er konsensus om et navn til b .

- Vi siger, at $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er en *eksponentiel udvikling*, hvis der findes $a, b \in \mathbb{R}_+$, så

$$f(x) = b \cdot a^x$$

for alle $x \in \mathbb{R}$. Vi siger, at a er *grundtallet* og b er *begyndelsesværdien*. Når begyndelsesværdien $b = 1$ kaldes f en *eksponentialfunktion*.

- Vi siger, at $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ er en *logaritmefunktion*, hvis der findes $a \in \mathbb{R}_+$, så

$$f(x) = \log_a(x)$$

for alle $x \in \mathbb{R}$. Vi siger, at a er logaritmens *base*.

Det er værd at bemærke, at ovenstående definitioner er overlappende - én funktion sagtens kan stemme overens med flere af ovenstående definitioner. Bemærk eksempelvis at funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ med forskrift $f(x) = x$ er en både affin funktion, et polynomium af grad 1 og en potensfunktion!

4.1.3 Egenskaber ved forskellige funktionstyper

I dette afsnit beskriver vi sammenhænge mellem forskrifter for de forskellige funktionstyper og diverse egenskaber, som vi definerer herover. Alle resultater gives af hensyn til omfanget uden bevis, eftersom det hele er kanonisk gymnasiepensum.

Sætning 4.1.3 (Affine funktioner). Lad $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ være givet ved $f(x) = ax + b$, hvor $a, b \in \mathbb{R}$. Da er

- ... f strengt voksende for $a > 0$, strengt aftagende for $a < 0$ og konstant for $a = 0$.
- ... f antisymmetrisk omkring $-\frac{b}{a}$, som er skærringspunktet med x -aksen.

- ... f invertibel for $a \neq 0$ med invers $f^{-1}(y) = \frac{y-b}{a}$.

Desuden skærer grafen for f y -aksen i $(0, b)$.

Sætning 4.1.4 (2. gradspolynomier). Lad $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ være givet ved $f(x) = ax^2 + bx + c$, hvor $a, b, c \in \mathbb{R}$ og $a \neq 0$.

- Da er f symmetrisk omkring $s = -\frac{b}{2a}$, hvor funktionen tager sit minimum, hvis $a > 0$, eller sit maksimum, hvis $a < 0$. Derfor er f nedad eller opad begrænset afhængigt af fortegnet for a .
- Hvis $b^2 - 4ac \geq 0$, så skærer grafen for f x -aksen i punkterne

$$\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, 0 \right), \quad \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, 0 \right),$$

som kan være sammenfaldende for $b^2 - 4ac = 0$. Hvis $b^2 - 4ac < 0$, så skærer grafen for f ikke x -aksen.

- Hvis $a > 0$, så er f strengt aftagende på intervallet $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ og strengt voksende på intervallet $[-\frac{b}{2a}, \infty)$.
- Hvis $a < 0$, så er f strengt voksende på intervallet $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ og aftagende voksende på intervallet $[-\frac{b}{2a}, \infty)$.

Desuden skærer grafen for f y -aksen i $(0, c)$.

Sætning 4.1.5 (Potensfunktioner). Lad $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ være givet ved $f(x) = b \cdot x^a$, hvor $a \in \mathbb{R}$ og $b \in \mathbb{R}_+$. Da er

- ... f strengt voksende for $a > 0$, strengt aftagende for $a < 0$ og konstant for $a = 0$.
- ... f positiv, så specielt nedad begrænset af 0.
- ... f invertibel for $a \neq 0$ med invers $f^{-1}(y) = \sqrt[a]{\frac{y}{b}}$.

Desuden skærer grafen for f linjen $x = 1$ i $(1, b)$.

Sætning 4.1.6 (Eksponentielle udviklinger). Lad $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ være givet ved $f(x) = b \cdot a^x$, hvor $a, b \in \mathbb{R}_+$. Da er

- ... f strengt voksende for $a > 1$, strengt aftagende for $a < 1$ og konstant for $a = 1$.
- ... f positiv, så specielt nedad begrænset af 0.
- ... f invertibel for $a \neq 1$ med invers $f^{-1}(y) = \log_a\left(\frac{y}{b}\right)$.

Desuden skærer grafen for f y -aksen i $(0, b)$.

Sætning 4.1.7 (Logaritmefunktioner). Lad $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ være givet ved $f(x) = \log_a(x)$, hvor $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$. Da er

- ... f strengt voksende for $a > 1$ og strengt aftagende for $a < 1$.
- ... f invertibel med invers $f^{-1}(y) = a^y$.

Ovenstående er ikke nødvendigvis en udtømmende beskrivelse af egenskaber ved de forskellige funktionstype, eksempelvis kan inddrages skærringspunkter med x -aksen, eller mere generelt skæringspunkter med en ret linje. Netop denne betragtning kunne være interessant, hvis man ønsker at diskutere algebraens fundamentalsætning vedrørende (komplekse) rødder for n 'te gradspolynomier.

4.1.4 Perspektivering: Funktionalligninger

Konstante, Lineære og Affine Funktioner

Det er let at se, at konstante funktioner netop er alle funktioner, der opfylder *funktionalligningen*

$$f(x) = f(y)$$

for alle $x, y \in \mathbb{R}$. Lidt mindre oplagt er det, når vi betragter lineære funktioner, men vi søger en ligning, der indfanger alle funktioner med følgende karakteristika.

- Når input skaleres med α , så skaleres output med α .
- Når input øges med y , så øges output med $f(y)$.

Resultatet herunder viser, at ovenstående karakteristika opfyldes af netop lineære funktioner.

Sætning 4.1.8. Lad $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Da findes $a \in \mathbb{R}$, så $f(x) = ax$, hvis og kun hvis f opfylder

$$f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y) \quad (4.1)$$

for alle $\alpha, x, y \in \mathbb{R}$.

Bevis. Det er let at se, at enhver lineær funktion $f(x) = ax$ for $a \in \mathbb{R}$ opfylder ligning (4.1), så betragt nu en vilkårlig funktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, som opfylder (4.1). Lad $a = g(1)$ og bemærk

$$\begin{aligned} g(x) &= g(x \cdot 1 + 0) = x \cdot g(1) + g(0) = ax + g(0) \\ g(0) &= g(-1 \cdot 0 + 0) = -1 \cdot g(0) + g(0) = 0 \end{aligned}$$

Ved at kombinere ovenstående kan vi konkludere $g(x) = ax$ for alle $x \in \mathbb{R}$. □

En lidt større klasse af funktioner er de *affine funktioner* $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, som kan konstrueres ved at lægge en lineær funktion sammen med en konstant funktion. Vi får således, at affine funktioner har forskrift $f(x) = ax + b$ for $a, b \in \mathbb{R}$, og vi kaldes a for *hældningskoefficienten* og b for *begyndelsesværdien*.

Alternativt kan vi forstå affine funktioner som den klasse af funktioner, hvor $f(x)$ vokser proportionalt med x , sagt med andre ord er

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

konstant. Dette giver anledning til følgende karakteristika af affine funktioner.

Sætning 4.1.9. Lad $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Hvis der findes $a \in \mathbb{R}$, så

$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1), \quad \text{for alle } x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \quad (4.2)$$

da er $f(x) = ax + b$, hvor $b = f(0)$.

Bevis. Det er let at se, at enhver affin funktion $f(x) = ax + b$ for $a, b \in \mathbb{R}$ opfylder ligning (4.2), så betragt nu en vilkårlig funktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, som opfylder (4.2). Ved at lade $x_1 = 0$ fås da

$$g(x) = g(x) = a(x - 0) + f(0) = ax + b,$$

hvilket viser det ønskede. □

Vi kan tænke på ovenstående som det omvendte resultat af to-punktsformlen for affine funktioner, nemlig at hvis to-punktsformlen holder for alle punkter for en funktion f , så er f en affin funktion. Alternativt kan affine funktioner realiseres som løsninger til en funktionalligning, der i højere grad afspejler fællestrækkene med lineære funktioner.

Sætning 4.1.10. Lad $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Da findes $a \in \mathbb{R}$, så $f(x) = ax$, hvis og kun hvis f opfylder

$$f(\alpha x + y) = \alpha(f(x) - f(0)) + f(y) \quad (4.3)$$

for alle $\alpha, x, y \in \mathbb{R}$.

Bevis. Udelades. □

Potensfunktioner

Lad $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ være givet ved $f(x) = x^a$, hvor $a \in \mathbb{R}$. Da er det let at se, at f opfylder funktionalligningen

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

for alle $x, y \in \mathbb{R}$, men det er bestemt ikke let at afgøre, om der er andre funktioner, som opfylder denne ligning!

Lemma 4.1.11 (Cauchy's Funktionalligning). Lad $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ være en kontinuert funktion. Da findes $a \in \mathbb{R}$, så $f(x) = ax$, hvis og kun hvis

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (4.4)$$

for alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Skitse af bevis. Det kan vises, at $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ givet ved $f(x) = ax$ for $a \in \mathbb{R}$ er de eneste funktioner, som opfylder

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{for alle } x, y \in \mathbb{Q}.$$

Når vi betragter en kontinuert funktion f , som opfylder $f(x) = ax$ for alle $x \in \mathbb{Q}$, så følger det af netop kontinuitet, at $f(x) = ax$ for alle $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Overraskende nok er det ovenstående resultat, som skal hjælpe os med at forstå potensfunktioner fra et perspektiv af funktionalligninger.

Sætning 4.1.12. Lad $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ være en kontinuert funktion. Da findes $a \in \mathbb{R}$, så $f(x) = x^a$, hvis og kun hvis

$$f(xy) = f(x)f(y) \quad (4.5)$$

for alle $x, y \in \mathbb{R}_+$.

Bevis. Definér $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ved $g(x) = \log(f(e^x))$. Da fås

$$\begin{aligned} g(x+y) &= \log(f(e^{x+y})) = \log(f(e^x \cdot e^y)) = \log(f(e^x) \cdot f(e^y)) \\ &= \log(f(e^x)) + \log(f(e^y)) = g(x) + g(y), \end{aligned}$$

hvorfor det følger af Lemma 4.1.11, at $g(x) = ax$ for $a \in \mathbb{R}$. Men da fås endelig

$$f(x) = e^{g(\log x)} = e^{a \log x} = x^a,$$

hvilket er det ønskede. $\square$

En smule mere generelt kan man med lignende teknikker vise, at de eneste kontinuerte funktioner $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, som opfylder

$$f(1)f(xy) = f(x)f(y)$$

for alle $x, y \in \mathbb{R}$ er givet ved $f(x) = b \cdot x^a$ for $a, b \in \mathbb{R}$. Ovenstående giver en formel forståelse af potensfunktioners vækstegenskaber, som kan direkte sammenlignes med lineære funktioner.

Ekspontielle udviklinger

Lad $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ være givet ved $f(x) = a^x$, hvor $a \in \mathbb{R}_+$. Da er det let at se, at f opfylder funktionalligningen

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

for alle $x, y \in \mathbb{R}$, men det er bestemt ikke let at afgøre, om der er andre funktioner, som opfylder denne ligning!

Sætning 4.1.13. Lad $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ være en kontinuert funktion, som ikke er identisk 0. Da findes $a \in \mathbb{R}_+$, så $f(x) = a^x$, hvis og kun hvis

$$f(x+y) = f(x)f(y) \quad (4.6)$$

for alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Bevis. Det er let at se, at enhver lineær funktion $f(x) = ax$ for $a \in \mathbb{R}$ opfylder ligning (4.6), så betragt en vilkårlig funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, som opfylder (4.6). Vi viser først, at $f(x) = a^x$ for alle $x \in \mathbb{N}$, dernæst alle $x \in \mathbb{Z}$ og endelig alle $x \in \mathbb{Q}$. Det følger da af antagelsen om kontinuitet, at $f(x) = a^x$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

Lad $a = f(1)$ og lad $n \in \mathbb{N}$. Da haves

$$f(n) = f(1)f(n-1) = f(1)^2 f(n-2) = \dots = f(1)^n = a^n.$$

Bemærk endvidere, at

$$f(x) = f(x+0) = f(x)f(0),$$

hvorfor vi har $f(0) = 1$. Da følger det, at

$$1 = f(0) = f(n-n) = f(n)f(-n),$$

hvorfor vi får $f(-n) = f(n)^{-1} = a^{-n}$. Dette viser $f(x) = a^x$ for alle $x \in \mathbb{Z}$.

Lad nu $p, q \in \mathbb{Z}$, og antag $q \neq 0$. Da haves

$$a = f(1) = f\left(\underbrace{\frac{1}{q} + \frac{1}{q} + \dots + \frac{1}{q}}_{q \text{ gange}}\right) = f\left(\frac{1}{q}\right)^q,$$

hvorfor vi har $f\left(\frac{1}{q}\right) = a^{1/q}$. Da fås tilsvarende

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(\underbrace{\frac{1}{q} + \frac{1}{q} + \dots + \frac{1}{q}}_{p \text{ gange}}\right) = f\left(\frac{1}{q}\right)^p = \left(a^{1/q}\right)^p = a^{p/q},$$

hvilket viser $f(x) = a^x$ for alle $x \in \mathbb{Q}$. Det følger nu, at eftersom f er kontinuert, så er $f(x) = a^x$ for alle $x \in \mathbb{R}$, hvilket er det ønskede. $\square$

En smule mere generelt kan man med lignende teknikker vise, at de eneste kontinuerte funktioner $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, som opfylder

$$f(0)f(x+y) = f(x)f(y)$$

for alle $x, y \in \mathbb{R}$ er givet ved $f(x) = b \cdot a^x$ for $a, b \in \mathbb{R}$. Ovenstående giver en formel forståelse af eksponentielle udviklingers vækstegenskaber, som kan direkte sammenlignes med lineære funktioner.

Sætning 4.1.14. Lad $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ være en kontinuert funktion, som ikke er identisk 0. Da findes $a \in \mathbb{R}$, så $f(x) = a \ln x$, hvis og kun hvis

$$f(xy) = f(x) + f(y) \quad (4.7)$$

for alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Bevis. Lad f være en funktion, som opfylder (4.7) og betragt funktionen $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ givet ved $g(x) = f(e^x)$. Da haves

$$g(x+y) = f(e^{x+y}) = f(e^x \cdot e^y) = f(e^x) + f(e^y) = g(x) + g(y).$$

Vi bemærker således, at g opfylder Cauchy's Funktionalligning beskrevet i Lemma 4.1.11, hvorfor der findes $a \in \mathbb{R}$, så $g(x) = ax$ for alle $x \in \mathbb{R}$. Da logaritmefunktionen er invers til eksponentialfunktionen, følger det at

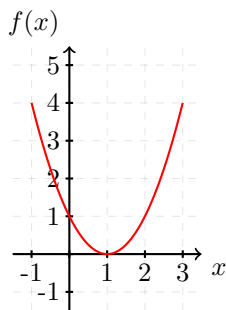
$$f(x) = f(e^{\ln x}) = g(\ln x) = a \ln x,$$

hvilket viser det ønskede.

Den modsatte implikation er blot logaritmeregnereglen $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, hvorfor argumentet udelades her. $\square$

4.2 Bilag

Figur 4.1: Grafen for en funktion



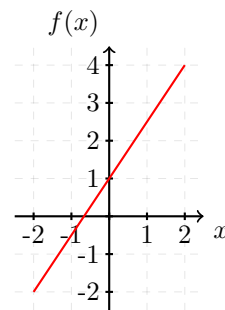
Udfyld nedenstående sildeben ved at aflæse på grafen.

x							
$f(x)$							

og brug dette til at finde en forskrift for f .

$$f(x) =$$

Figur 4.3: Grafen for en funktion



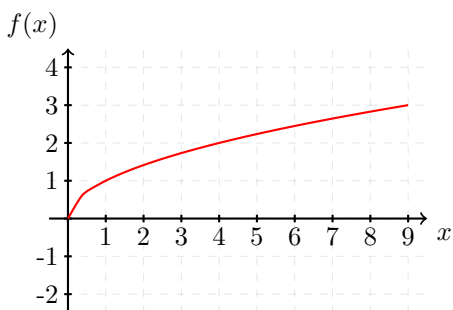
Udfyld nedenstående sildeben ved at aflæse på grafen.

x							
$f(x)$							

og brug dette til at finde en forskrift for f .

$$f(x) =$$

Figur 4.2: Grafen for en funktion



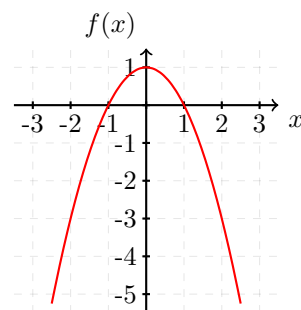
Udfyld nedenstående sildeben ved at aflæse på grafen.

x							
$f(x)$							

og brug dette til at finde en forskrift for f .

$$f(x) =$$

Figur 4.4: Grafen for en funktion



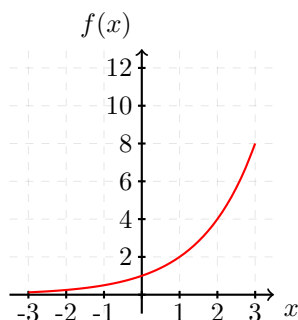
Udfyld nedenstående sildeben ved at aflæse på grafen.

x							
$f(x)$							

og brug dette til at finde en forskrift for f .

$$f(x) =$$

Figur 4.5: Grafen for en funktion



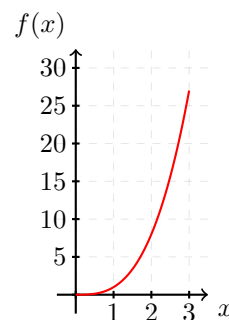
Udfyld nedenstående sildeben ved at aflæse på grafen.

x							
$f(x)$							

og brug dette til at finde en forskrift for f .

$f(x) =$

Figur 4.7: Grafen for en funktion



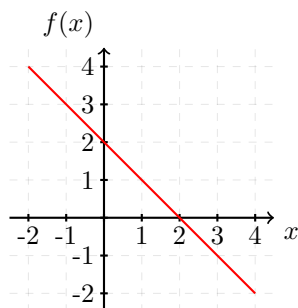
Udfyld nedenstående sildeben ved at aflæse på grafen.

x							
$f(x)$							

og brug dette til at finde en forskrift for f .

$f(x) =$

Figur 4.6: Grafen for en funktion



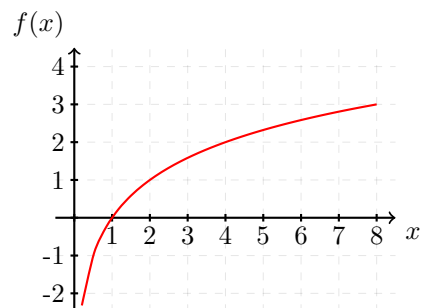
Udfyld nedenstående sildeben ved at aflæse på grafen.

x							
$f(x)$							

og brug dette til at finde en forskrift for f .

$f(x) =$

Figur 4.8: Grafen for en funktion



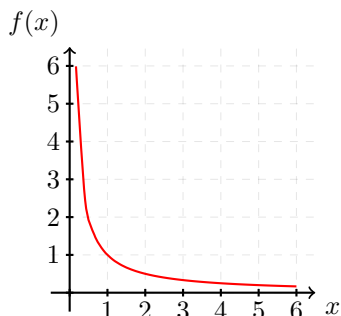
Udfyld nedenstående sildeben ved at aflæse på grafen.

x							
$f(x)$							

og brug dette til at finde en forskrift for f .

$f(x) =$

Figur 4.9: Grafen for en funktion



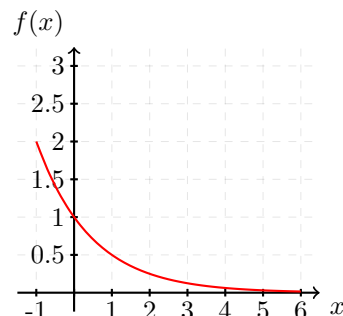
Udfyld nedenstående sildeben ved at aflæse på grafen.

x							
$f(x)$							

og brug dette til at finde en forskrift for f .

$$f(x) =$$

Figur 4.11: Grafen for en funktion



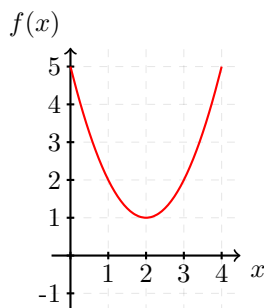
Udfyld nedenstående sildeben ved at aflæse på grafen.

x							
$f(x)$							

og brug dette til at finde en forskrift for f .

$$f(x) =$$

Figur 4.10: Grafen for en funktion



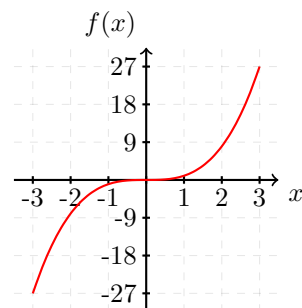
Udfyld nedenstående sildeben ved at aflæse på grafen.

x							
$f(x)$							

og brug dette til at finde en forskrift for f .

$$f(x) =$$

Figur 4.12: Grafen for en funktion



Udfyld nedenstående sildeben ved at aflæse på grafen.

x							
$f(x)$							

og brug dette til at finde en forskrift for f .

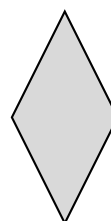
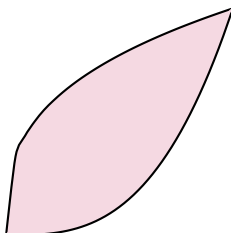
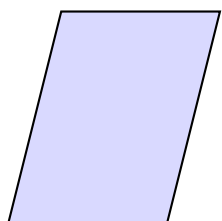
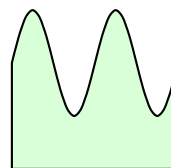
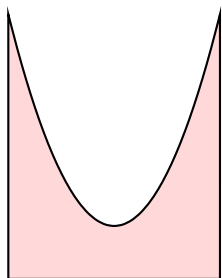
$$f(x) =$$

Kapitel 5

Arealer og Integration

I det følgende præsenteres en undersøgende tilgang til introduktionen af integraler med udgangspunkt i klassisk geometrisk arealberegning. Først og fremmest cementerer vi vores forståelse af arealer i geometrisk forstand, som for mange elever i gymnasiet vil fungere som repetition. Herefter bemærker vi, at geometrisk arealberegning ligeledes kan forstås i en analytisk kontekst som arealer under grafer for funktioner. Denne betragtning leder os til spørgsmålet om arealer af områder indkredset af grafer for funktioner, og efter en grundig undersøgelse leder dette arbejde os til definitionen af integralet samt en motivation for efterfølgende arbejde med stamfunktioner og analysens fundamentalsætning.

Miljø. Betragt de forskellige figurer vist herunder.



Hvad vil det sige at bestemme arealet af ovenstående figurer - og hvordan gør man? Overvej, hvilke metoder du har i dit repertorie til at besvare netop dette spørgsmål. ◦

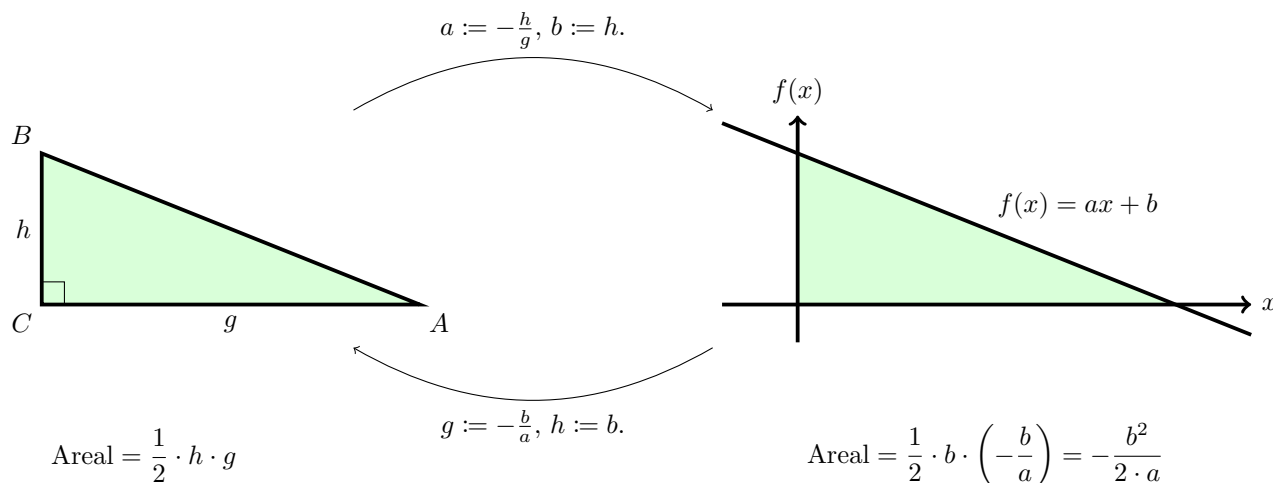
5.1 Kernestof

5.1.1 Arealer i Geometri og Analyse

Vi indleder med at minde læseren om en lang række figurer, som vi kan bestemme arealet af ud fra geometriske betragtninger (se bilag).

Det er let at tænke på en 2-dimensional figur, hvor vi ikke umiddelbart ved, hvordan man kan bestemme arealet ud fra geometriske betragtninger. I det følgende vil vi undersøge figurer, som kan indkredses af kontinuerte funktioner. Først vil vi imidlertid forsøge at oversætte noget af vores geometrisk funderede viden om arealer af 2-dimensionale figurer til et analytisk sprog for at indikere, at en analytisk tilgang er mindst lige så frugtbar. Mere konkret er tanken, at oversætte vinkler og sidelængder til funktionsforskrifter.

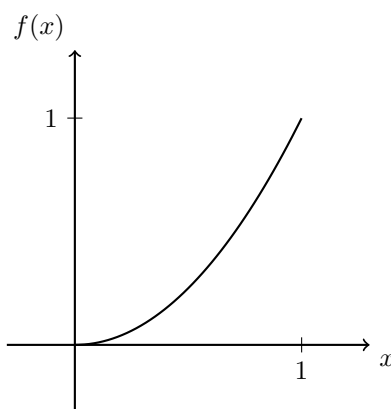
Betragt eksempelvis en relativt simpel figur som en revinklet trekant som vist herunder. Vi kan indlejre denne figur i et 2-dimensionalt koordinatsystem og betragte hypotenusen som et linjestykke af en ret linje med forskrift $y = ax + b$. De to kateter betragtes som linjestykker fra de to koordinataksler.



Læseren opfordres til at overveje, hvordan andre figurer kan indlejres i et koordinatsystem og betragtes som et område indkredset af en eller flere kontinuerte funktioner. Overvej eksempelvis generelle trekanter, firkanter eller cirkler. Den konkrete udformning er ikke vigtig, men idéen at geometriske figurer *kan* indkredses af kontinuerte funktioner er essentiell!

5.1.2 Areal under avancerede funktioner: $f(x) = x^2$

Det er umiddelbart svært at bestemme arealet indkredset af mere avancerede funktioner eksakt, men for at have et udgangspunkt kan vi prøve at approksimere arealet. Med udgangspunkt i funktionen $f(x) = x^2$ spørger vi, hvordan kan vi tilnærme os arealet under grafen i intervallet $[0, 1]$?



En naturlig tilgang til at approksimere arealet under en funktion er at inddele definitionsintervallet $[a, b]$ i mindre delintervaller og i hvert delinterval approksimere arealet. Vi siger $I = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subseteq [a, b]$ er en *inddeling af* $[a, b]$, hvis

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b,$$

og vi definerer *finheden* af inddelingen I ved $\text{fin}(I) := \min_i (x_i - x_{i-1})$. Endelig siger vi, at en inddeling I af intervallet $[a, b]$ er *finere* end J , hvis $J \subseteq I$.

Vi definerer nu en række begreber, som relaterer til udfordringen med at approksimere arealet under grafen for en funktion.

Definition 5.1.1. Lad $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ og lad $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ være en kontinuert funktion. Lad $I = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ være en inddeling af $[a, b]$.

- *Venstresummen, højresummen og middelsummen* af f med hensyn til I er henholdsvis

$$\sum_{i=1}^n f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}), \quad \sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \quad \text{og} \quad \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)(x_i - x_{i-1}).$$

- *Undersummen og oversummen* af f med hensyn til I er henholdsvis

$$U(f, I) := \sum_{i=1}^n \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)(x_i - x_{i-1}) \quad \text{og} \quad O(f, I) := \sum_{i=1}^n \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)(x_i - x_{i-1}).$$

- Arealet under den *lineære approksimation* af f med hensyn til I er

$$\sum_{i=1}^n \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}(x_i - x_{i-1}).$$

Det er ikke umiddelbart klart, hvilken sum der giver anledning til den bedste approksimation givet en inddeling, men i alle tilfælde er det intuitivt overbevisende, at en finere inddeling giver anledning til en stadigt bedre approksimation af arealet under grafen for f . Det er klart, at undersummen altid er mindre end eller lig venstresummen, højresummen og middelsummen samt arealet under den lineære approksimation af f , som igen alle er mindre end eller lig oversummen. Mere overraskende er måske, at forskellen på undersummen og oversummen går mod 0, når man vælger stadig finere inddelinger.

Sætning 5.1.2. Lad $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, betragt en kontinuert funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ og betragt for alle $n \in \mathbb{N}$ inddelingerne $I_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ og antag af finheden heraf går mod 0 for $n \rightarrow \infty$. Da går forskellen mellem undersummen og oversummen af f med hensyn til I_n mod 0 for $n \rightarrow \infty$.

Bevis. Lad $\varepsilon > 0$. Da f er kontinuert findes $\delta > 0$, så der gælder

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Eftersom finheden af I_n går mod 0, da findes $N \in \mathbb{N}$, så for alle $n \geq N$ haves $\text{fin}(I_n) < \delta$.

Vælg $n \geq N$. For ethvert $i = 0, 1, \dots, k$ og for alle $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$ gælder da $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, hvorfor det følger at

$$0 \leq \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) - \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \leq \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Men det følger da, at for haves $k \geq K$ haves

$$\begin{aligned} O(f, I_n) - U(f, I_n) &= \sum_{i=1}^n \left(\sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) - \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \right) (x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b - a} (b - a) = \varepsilon, \end{aligned}$$

hvilket viser, at for ethvert $\varepsilon > 0$ der gælder, at for tilstrækkeligt store $k \in \mathbb{N}$, så er forskellen på undersummen og oversummen af f med hensyn til I_k mindre end eller lig ε . Med andre ord går forskellen på undersummen og oversummen af f med hensyn til I_n mod 0 for $n \rightarrow \infty$. $\square$

Ovenstående resultat viser, at når vi betragter en følge af inddelinger, hvis finhed går mod 0, så går undersummen og oversummen af f med hensyn til de givne inddelinger mod det samme. Da undersummen og oversummen af f er vores henholdsvis mindste og største approksimation af arealet viser dette, at alle vores approksimationer går mod det samme tal, når finheden går mod 0 - nemlig arealet! Dette retfærdiggør, at vi herunder definerer integralet som grænseværdien af højresummerne for en bestemt følge af inddelinger. Vi har ikke vist, at for to forskellige følger af inddelinger, hvis finhed går mod 0, da går undersummerne og oversummerne for en kontinuert funktion f med hensyn til de forskellige inddelinger faktisk mod det samme. Af hensyn til omfanget udelades dette og integralet defineres med udgangspunkt i en inddeling, hvor punkterne er fordelt jævnt i intervallet.

Definition 5.1.3. Lad $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, betragt en kontinuert funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ og lad $I_N = \{a, a + \frac{b-a}{N}, a + 2\frac{b-a}{N}, \dots, b\}$ være inddelinger af intervallet $[a, b]$ for alle $N \in \mathbb{N}$. Da er *integralet af f over intervallet $[a, b]$* givet ved

$$\int_a^b f(x) \, dx := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^N f\left(a + i \frac{b-a}{N}\right)$$

Vores diskussion frem til nu viser, at integralet af f over intervallet $[a, b]$ netop beskriver arealet under f i intervallet $[a, b]$. Vi er således nu i en position til at bestemme arealet under $f(x) = x^2$ på intervallet $[0, 1]$.

Eksempel 5.1.4. Lad $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ være givet ved $f(x) = x^2$ og betragt for $n \in \mathbb{N}$ en inddeling af intervallet

$$I_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\right\}.$$

Vi bemærker først, at

$$\sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3},$$

hvor den sidste lighed følger af Lemma 5.2.2. Vi får således, at arealet under grafen for f i intervallet $[0, 1]$ er givet ved

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}.$$

At bestemme arealer indkredset af kontinuerte funktioner på ovenstående måde er generelt særdeles omstændigt og kræver ad hoc argumenter til udregning af summen som i eksemplet herover. Heldigvis findes der dybe resultater i matematisk analyse, som gør situationen markant lettere.

Theorem 5.1.5 (Analysens Fundamentalsætning). Lad $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ og betragt en kontinuert funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Lad $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ være funktionen defineret ved

$$F(x) := \int_a^x f(t) \, dt$$

Da er F differentiabel i intervallet (a, b) , og der gælder $F'(x) = f(x)$ for alle $x \in (a, b)$ og $F(a) = 0$.

Bevis. Lad $x \in (a, b)$ og betragt $\Delta x \in \mathbb{R}$, så $x + \Delta x \in [a, b]$. Da gælder¹

$$\int_a^x f(t) \, dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) \, dt = \int_a^{x+\Delta x} f(t) \, dt$$

Ved at omskrive ovenstående får vi således

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t) \, dt$$

Det er imidlertid klart, at

$$\Delta x \min_{a \in [x, x+\Delta x]} f(a) \leq \int_x^{x+\Delta x} f(t) \, dt \leq \Delta x \max_{a \in [x, x+\Delta x]} f(a),$$

¹Et bevis kræver en mere fleksibel definition med vilkårlige inddelinger.

så fordi f er kontinuert, må der findes $c \in [x, x + \Delta x]$ ², som opfylder

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x + \Delta x} f(t) dt = f(c)$$

Lader vi nu Δx gå mod 0, opdager vi

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c) = f(x),$$

hvor det sidst lighedstegn følger, da $x \leq c \leq x + \Delta x$, og $x + \Delta x \rightarrow x$ for $\Delta x \rightarrow 0$, og f er kontinuert. $\square$

For at bestemme integralet kan vi i stedet for at udregne en kompliceret sum og undersøge grænseværdien af den, blot lede blandt funktion F , som opfylder $F' = f$. Og det er en god strategi, på grund af følgende resultat.

Korollar 5.1.6. Lad $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ og betragt en kontinuert funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Da findes netop én funktion, som opfylder $F'(x) = f(x)$ for alle $x \in (a, b)$ og $F(a) = 0$.

Bevis. Lad F, G være funktioner, som opfylder $F'(x) = f(x) = G'(x)$ og $F(0) = 0 = G(0)$. Det følger da, at

$$(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = 0,$$

hvorfor der findes en konstant $c \in \mathbb{R}$, så $F(x) - G(x) = c$ for alle $x \in [a, b]$. Denne konstant er nødvendigvis 0, så $F(0) = 0 = G(0)$, hvorfor vi konkluderer $F(x) = G(x)$ for alle $x \in [a, b]$.

Det følger af Theorem 5.1.5, at der faktisk findes en funktion med de givne egenskaber. $\square$

Ovenstående motiverer introduktionen af stamfunktioner, integralregneregler og udregning af bestemte integraler, som er klassisk pensum i gymnasiet.

²Et bevis kræver en stringent definition af kontinuitet

5.2 Appendiks

Lemma 5.2.1. Lad $N \in \mathbb{N}$. Da gælder

$$1 + 2 + 3 + \dots + (N - 1) + N = \frac{N(N + 1)}{2}$$

Bevis. Vi bemærker, at ved først at skrive summen almindeligt op og derunder skrive summen i modsat rækkefølge, så kan vi lægge elementerne sammen lodret og få

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & N - 1 & + & N \\ N & + & N - 1 & + & N - 2 & + & \dots & + & 2 & + & 1 \\ \hline N + 1 & + & N + 1 & + & N + 1 & + & \dots & + & N + 1 & + & N + 1 \end{array}$$

På den nederste række står $N + 1$ lagt sammen med sig selv i alt N gange, som selvfølgelig i alt giver $N(N + 1)$. Det dobbelte af summen er således $N(N + 1)$, hvorfor summen i sig selv blot er halvdelen, altså

$$1 + 2 + 3 + \dots + N = \frac{N(N + 1)}{2}$$

Dette viser det ønskede. □

Lemma 5.2.2. Lad $N \in \mathbb{N}$. Da gælder

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (N - 2)^2 + (N - 1)^2 + N^2 = \frac{N(N + 1)(2N + 1)}{6}$$

Bevis. Vi bemærker, at ved først at skrive alle ledene fra summen på en lodret søjle og ved siden af skrive ledene fra Lemma 5.2.1, så kan vi lægge elementerne sammen vandret og få

$$\begin{array}{ccccccccc} N^2 & + & N & = & N(N + 1) & = & 2(1 + 2 + 3 + \dots + (N - 2) + (N - 1) + N) \\ (N - 1)^2 & + & N - 1 & = & (N - 1)N & = & 2(1 + 2 + 3 + \dots + (N - 2) + (N - 1)) \\ (N - 2)^2 & + & N - 2 & = & (N - 2)(N - 1) & = & 2(1 + 2 + 3 + \dots + (N - 2)) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 3^2 & + & 3 & = & 3 \cdot 4 & = & 2(1 + 2 + 3) \\ 2^2 & + & 2 & = & 2 \cdot 3 & = & 2(1 + 2) \\ 1^2 & + & 1 & = & 1 \cdot 2 & = & 2(1) \end{array}$$

Lægger vi nu sammen lodret længst til venstre og længst til højre fås

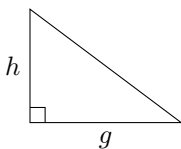
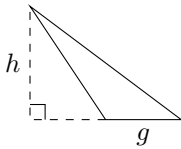
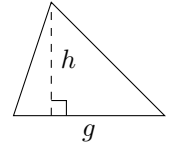
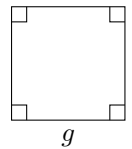
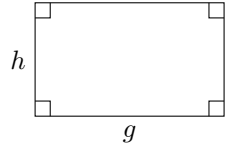
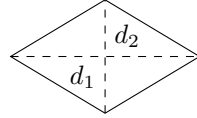
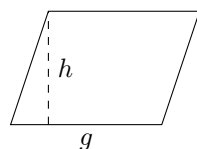
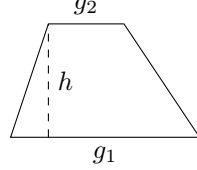
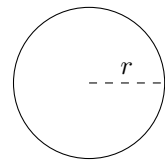
$$\sum_{n=1}^N n^2 + \sum_{n=1}^N n = 2 \sum_{n=1}^N n(N + 1 - n) = 2(N + 1) \sum_{n=1}^N n - 2 \sum_{n=1}^N n^2$$

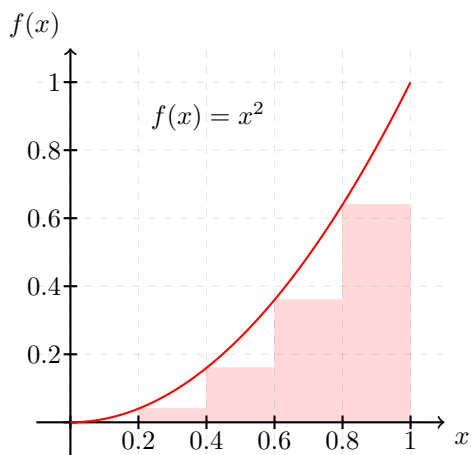
som kan omskrives til

$$3 \sum_{n=1}^N n^2 = (2N + 1) \sum_{n=1}^N n \stackrel{(\dagger)}{=} \frac{N(N + 1)(2N + 1)}{2}$$

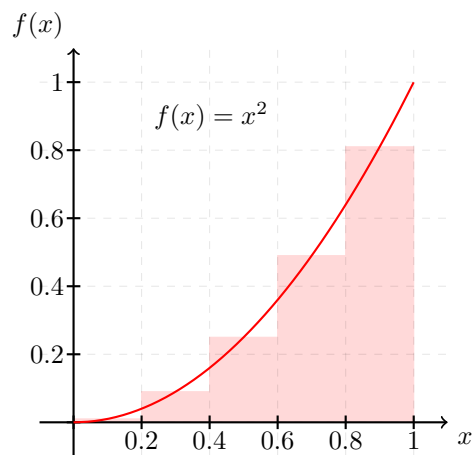
hvor $(\dagger)$ følger af Lemma 5.2.1. Ved at dividere med 3 på begge sider fås det ønskede. □

5.3 Bilag

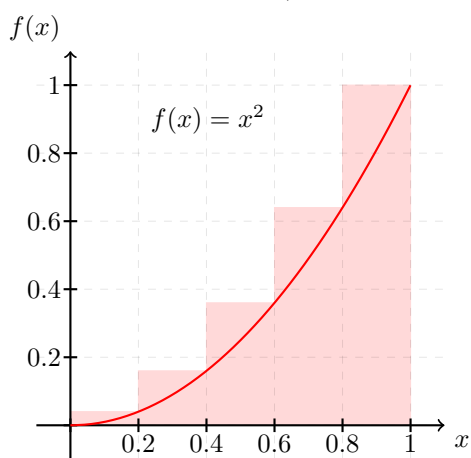
Navn	Tegning	Geometrisk Formel for Areal
Trekanter	Retvinklet 	$\frac{1}{2} \cdot h \cdot g$
	Stumpvinklet 	$\frac{1}{2} \cdot h \cdot g$
	Spidsvinklet 	$\frac{1}{2} \cdot h \cdot g$
Firkanter	Kvadrat 	g^2
	Rektangel 	$h \cdot g$
	Rombe 	$\frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2$
	Parallelogram 	$h \cdot g$
	Trapez 	$\frac{1}{2} \cdot h \cdot (g_1 + g_2)$
Cirkel		πr^2



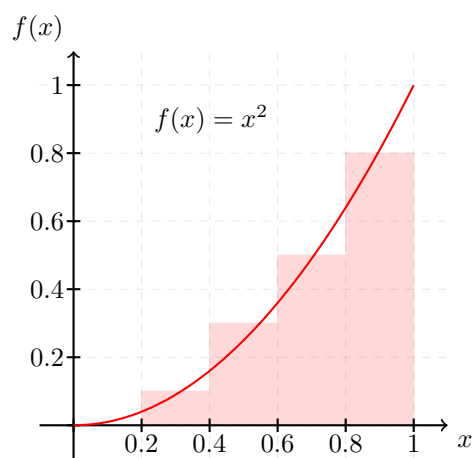
Figur 5.1: Undersum / Venstresum



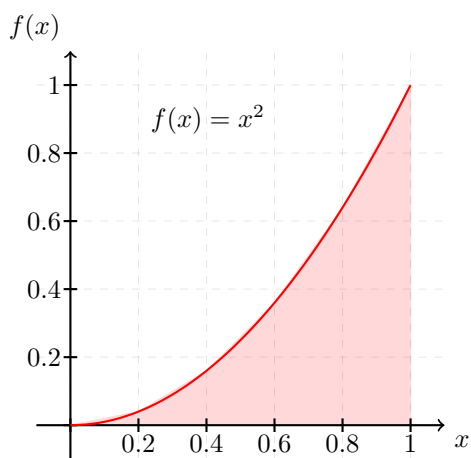
Figur 5.3: Middelsum



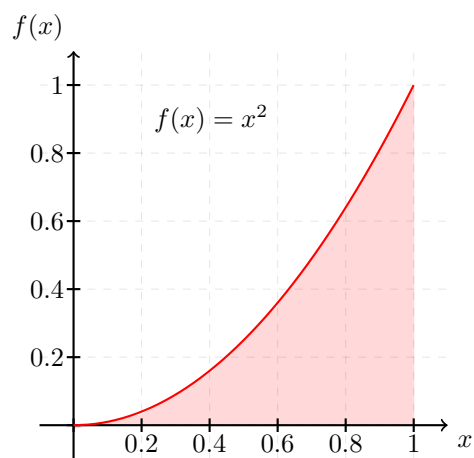
Figur 5.2: Oversum / Højresum



Figur 5.4: Antal (halve) kasser



Figur 5.5: Lineær approksimation



Figur 5.6: Lineær approksimation med tangent

5.4 Arealet under $f(x) = x^2$

Navn	Beskrivelse	Formel	Fordele	Ulemper
Undersum.	I hvert interval bestemmes den mindste værdi, og vi finder arealet af søjlen med denne højde. Alle søjlernes areal lægges sammen.	$\frac{(N-1)N(2N-1)}{6N^3}$	Præcist defineret, simpel at beregne.	Upæcis for store intervaller, altid for lille.
Oversum.	I hvert interval bestemmes den største værdi, og vi finder arealet af søjlen med denne højde. Alle søjlernes areal lægges sammen.	$\frac{N(N+1)(2N+1)}{6N^3}$	Præcist defineret, simpel at beregne.	Upæcis for store intervaller, altid for stor.
Middelsum.	I hvert interval bestemmes funktionsværdien i intervallets midtpunkt, og vi finder arealet af søjlen med denne højde. Alle søjlernes areal lægges sammen.	$\frac{2N^2+1}{6N^2}$	Præcist defineret.	Kompliceret at beregne, arbitrær, upæcis
Lineær approksimation.	Træt en ret linje fra punktet på grafen i venstre endepunkt af intervallet til punktet på grafen i højre endepunkt af intervallet, og bestem arealet under den rette linje. Alle arealerne lægges sammen.	$\frac{2N^2+1}{6N^2}$	Præcist defineret, simpel at beregne.	Upæcis for store intervaller.
Lineær approksimation med Tangent.	Indtegn tangenten i midtpunktet af intervallet og beregn arealet under tangent i det givne interval. Alle arealerne lægges sammen.	$\frac{(N-1)(2N-1)}{3N^2} + \frac{N-1}{N^2}$	Præcist defineret, simpel formel.	Kompliceret generelt, kræver differentiability
Antal kasser under grafen.	Vi tæller antallet af kasser under grafen og ganger med arealet af kasserne.	?	Simpel.	Upæcis defineret, ingen formel.

Kapitel 6

Lineær Algebra i Planen

I det følgende præsenteres en undersøgende tilgang til forbindelserne mellem linjer i planen i Geometri, ligningsløsning og løsningsmængder i Algebra og vektorer og lineær uafhængighed i Vektorrum. Undersøgelsen kredser om en grundig overvejelse af parallelitet, særligt et forsøg på at gradbøje begrebet ‘parallel’. Det faglige indhold og det undersøgende arbejde placeres naturligt som afsluttende på et forløb om vektorer i 2. eller 3.g, eventuelt som introducerende for definitionen af determinanten.

6.1 Lineær Afhængighed i Planen

Vi indleder med at introducere et matematisk begreb, som formaliserer det intuitive billede af parallelitet af linjer i en kontekst af vektorer.

Definition 6.1.1. Lad $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$. Vi siger, at $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ er *lineært afhængige*, hvis der findes $x, y \in \mathbb{R}$ så

$$x\mathbf{a} + y\mathbf{b} = \mathbf{0}$$

hvor x, y ikke begge er 0. Hvis $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ikke er lineært afhængige, så siger vi, at de er *lineært uafhængige*.

I to dimensioner kan vi visualisere ovenstående som følger; to vektorer er lineært afhængige, netop hvis de peger i samme eller modsatte retning. Denne iagttagelse kan bidrage til at kvantificere i hvor høj grad to vektorer er lineært afhængige baseret på intuitionen, at to vektorer kan pege i næsten samme eller modsatte retning (svarende til at være tæt på at være lineært afhængige), eller to vektorer kan pege i vinkelrette retninger (svarende til at være langt fra at være lineært afhængige). Vi gør dette mere præcist herunder.

Miljø. Lad $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ være givet som

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Vi søger et *mål* $D: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, som kvantificerer i hvor høj grad to vektorer er lineært uafhængige. Vi bygger vores undersøgelse på intuitionen, at to vektorer kan være tæt på eller langt fra at være lineært uafhængige. Der skal med andre ord gælde følgende om $D(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ for $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$.

- Hvis $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ er lineært uafhængige, så skal der gælde $D(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$.
- Hvis $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ er tæt på at være lineært afhængige, så skal $D(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ være tæt på 0.
- Hvis $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ er langt fra lineært afhængige, så skal $D(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ være langt fra 0.

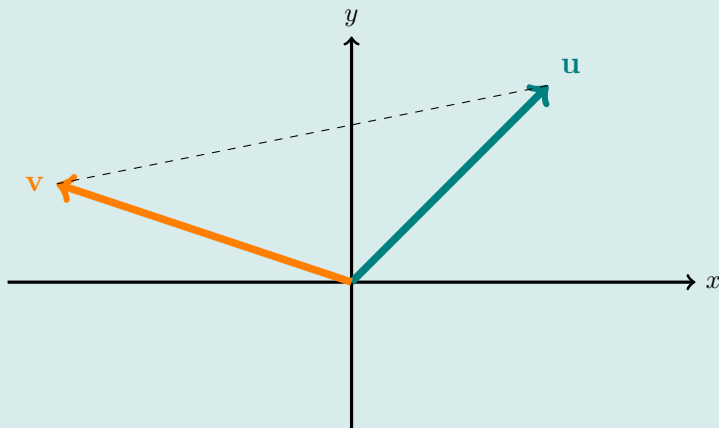
◦

Der er adskillige fornuftige bud på et mål $D: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, som beskriver i hvor høj grad to vektorer er lineært uafhængige, og herunder beskriver vi tre naturlige kandidater.

6.1.1 Euklidisk afstand i $\mathbb{R}^2$

Definition 6.1.2 (Afstand mellem vektorer). Lad $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$. Da er *afstanden mellem to vektorer* givet ved

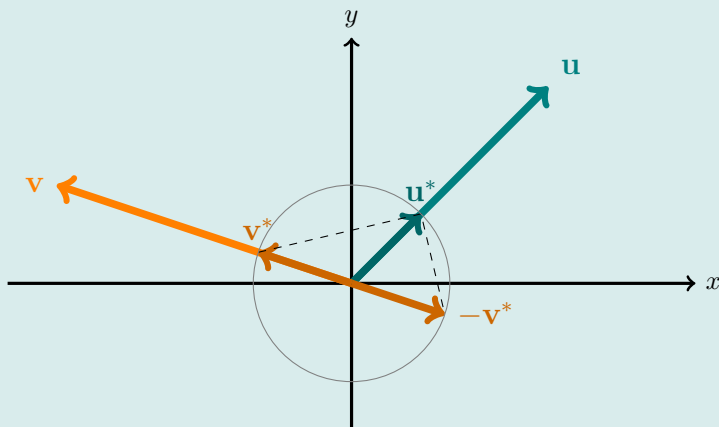
$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2}.$$



Som mål for hvor tætte to vektorer er på at være lineært afhængige har afstanden mellem vektorer umiddelbart to mangler, nemlig

- 1) To vektorer med samme retning, men forskellige længder, har afstand større end 0, selv om de er lineært afhængige.
- 2) To *næsten* modsatrettede vektorer vil have relativt stor afstand, selv om de *næsten* er lineært afhængige.

For at imødegå det første kritikpunkt kan vi normere vektorerne, altså betragte afstanden mellem $\mathbf{u}^* = \mathbf{u} / \|\mathbf{u}\|$ og $\mathbf{v}^* = \mathbf{v} / \|\mathbf{v}\|$ i stedet. For at imødegå det andet kritikpunkt vil vi tage den mindste af afstandene mellem $\mathbf{u}^*$ og $\mathbf{v}^*$ samt $\mathbf{u}^*$ og spejling af $\mathbf{v}^*$ i origo, altså $-\mathbf{v}^*$. Grafisk kan vi ved at indtegne en grå enhedscirkel fremstille situationen som vist herunder.



Formelt er det fremkomne mål $D: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ givet ved

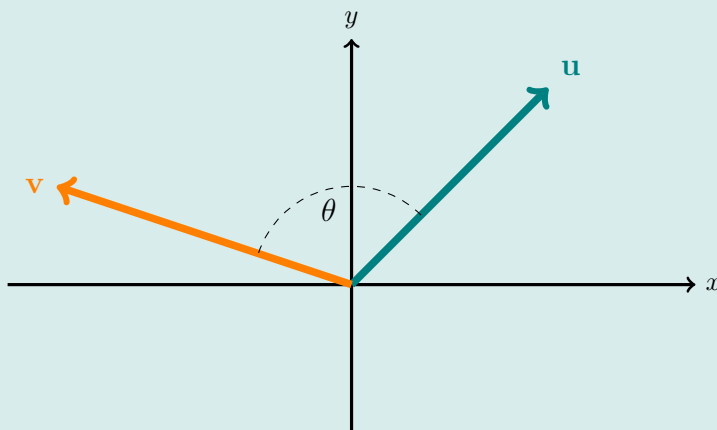
$$D(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \min \{ \|\mathbf{u}^* - \mathbf{v}^*\|, \|\mathbf{u}^* + \mathbf{v}^*\| \} = \sqrt{2 - 2 \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}},$$

hvilket følger af omstændige, men elementære udregninger.

6.1.2 Vinkler i $\mathbb{R}^2$

Definition 6.1.3 (Vinkel mellem vektorer). Lad $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$. Da opfylder *vinklen* θ mellem $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ligningerne

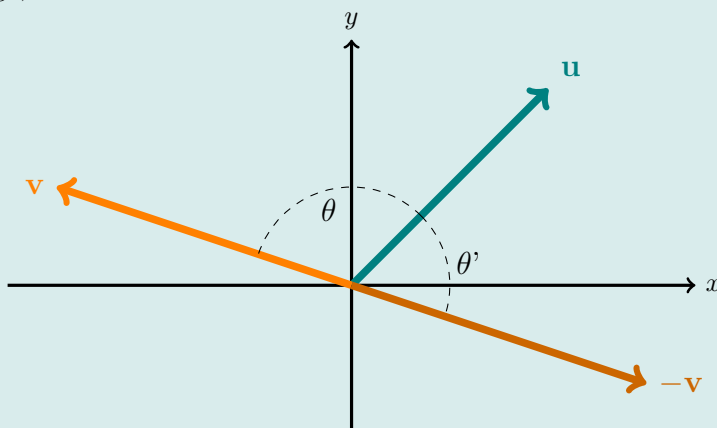
$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}, \quad \sin \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{v}}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}.$$



Som mål for hvor tætte to vektorer er på at være lineært afhængige har vinklen mellem vektorer umiddelbart én mangel, nemlig

- 1) To (næsten) modsatrettede vektorer udspænder en på (næsten) 180° eller π radianer, selv om de (næsten) er lineært afhængige.

For at imødekomme dette kritikpunkt vil vi tage den mindste af vinklerne mellem $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ samt $\mathbf{u}$ og spejlingen af $\mathbf{v}$ i origo, altså $-\mathbf{v}$. Grafisk kan vi fremstille situationen som vist herunder.



Formelt er det fremkomne mål $D: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ givet ved

$$\begin{aligned} D(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= \min \{\theta, \theta'\} = \min \left\{ \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \right), \cos^{-1} \left(-\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \right) \right\} \\ &= \min \left\{ \sin^{-1} \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{v}}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \right), \sin^{-1} \left(-\frac{\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{v}}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \right) \right\} \end{aligned}$$

Afslutningsvis kan vi meget højtflyvende bemærke, at den mindste vinkel af θ, θ' altid er mindre end eller lig $\pi/2$ radianer. I intervallet $[0, \pi/2]$ er $\sin \theta \simeq \theta$ en rimelig approximation, hvorfor

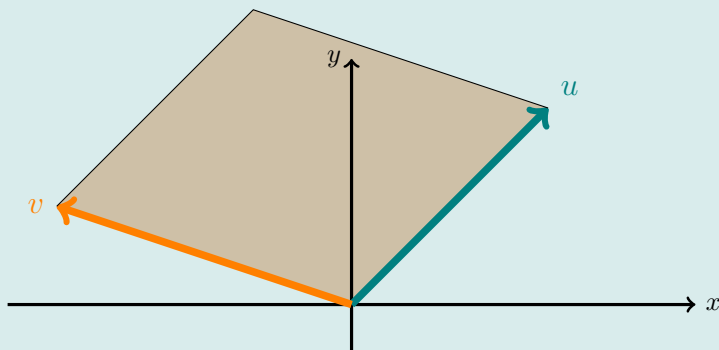
$$D_{\text{alt}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \frac{|\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{v}}|}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$$

kan formodes ligeledes at være et fornuftigt mål.

6.1.3 Arealer i $\mathbb{R}^2$

Definition 6.1.4 (Parallellogram udspændt af vektorer). Lad $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$. Da er *parallellogrammet udspændt af $\mathbf{u}, \mathbf{v}$* givet ved

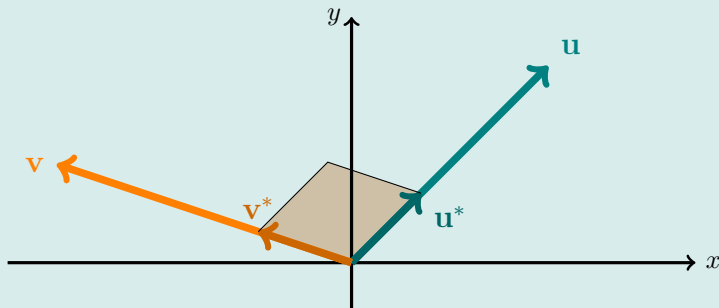
$$\text{Para}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \{x\mathbf{u} + y\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in [0, 1]\}.$$



Som mål for hvor tætte to vektorer er på at være lineært afhængige har arealet udspændt af vektorerne umiddelbart én mangel, nemlig

- 1) Arealet af den udspændte trekant afhænger ikke blot af vektorernes *retning*, men også af deres *længde*.

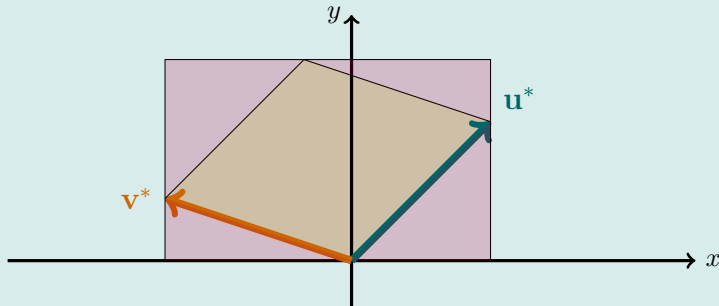
For at imødekomme dette kritikpunkt vil vi normere vektorerne, altså betragte arealet af parallellogrammet udspændt af $\mathbf{u}^* = \mathbf{u} / \|\mathbf{u}\|$ og $\mathbf{v}^* = \mathbf{v} / \|\mathbf{v}\|$. Grafisk kan vi fremstille situationen som vist herunder.



Formelt er det fremkomne mål $D: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ givet ved

$$D(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \min\{\theta, \theta'\} = \text{Areal}(\text{Para}(\mathbf{u}, \mathbf{v})) = \frac{|\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{v}}|}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|},$$

hvilket kan udregnes ved at betragte et omskrevet rektangel og udregne arealet af komplementærfiguren med hensyn til dette omskrevne rektangel, som indikeret herunder.



Afslutningsvis bemærker vi, at det fremkomne mål har en direkte parallell til D_{alt} , som vi beskrev i afsnittet om Vinkler i $\mathbb{R}^2$.

6.1.4 Perspektivering: Lineær Afhængighed i Rummet

I det følgende forudsætter vi yderligere kendskab til krydsproduktet af vektorer i $\mathbb{R}^3$, altså

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ -(a_1 b_3 - a_3 b_1) \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix},$$

samt at $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ udgør arealet af parallellogrammet udspændt af $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ i $\mathbb{R}^3$. Det er desuden nødvendigt at kende til projektionen af en vektor $\mathbf{a}$ på en vektor $\mathbf{b}$, mere præcist

$$\text{proj}_{\mathbf{b}}(\mathbf{a}) := \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|^2} \mathbf{b}.$$

Vi generaliserer umiddelbart definitionen af lineær afhængighed til 3 dimensioner.

Definition 6.1.5. Lad $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$. Vi siger, at $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ er *lineært afhængige*, hvis der findes $x, y, z \in \mathbb{R}$ så

$$x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c} = \mathbf{0}$$

hvor x, y, z ikke alle er 0. Hvis $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ ikke er lineært afhængige, så er de *lineært uafhængige*.

Som inspiration for definitionen af et mål for graden lineær uafhængighed betragter vi volumen af det 3-dimensionale objekt udspændt af tre vektorer i $\mathbb{R}^3$, mere præcist parallelloipedummet defineret herunder.

Definition 6.1.6. Lad $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$. Vi definerer *parallelloipedummet* udspændt af de tre vektorer som

$$\text{Parapip}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) := \left\{ x \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \in [0, 1] \right\}.$$

Vi bestemmer nu et formeludtryk volumen af et parallelloipedum.

Sætning 6.1.7. Lad $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$. Da er volumen af parallelloipedummet udspændt af $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ givet ved

$$\text{Vol}(\text{Parapip}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})) = |a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1|.$$

Bevis. Vi bemærker først, at arealet af parallellogrammet udspændt af $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ er givet ved $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$. Eftersom $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ er normal på planen udspændt af $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, så er højden af parallelloipedummet netop længden af projektionen af $\mathbf{c}$ på $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, altså

$$\|\text{proj}_{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}(\mathbf{c})\| = \frac{|\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})|}{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2} \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \frac{|\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})|}{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|}.$$

Det følger således, at volumen af parallelloipedummet er

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\text{Parapip}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})) &= \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| \cdot \|\text{proj}_{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}(\mathbf{c})\| = |\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})| \\ &= |a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1|, \end{aligned}$$

hvilket viser det ønskede. □

Definition 6.1.8. Lad $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$. Da er *determinanten* $\det: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ givet ved

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) := a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1.$$

Korollar 6.1.9. Betragt tre vektorer

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Da er $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ lineært afhængige, hvis og kun hvis $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$.

Bevis. Bemærk at $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ er lineært afhængige, hvis og kun hvis én af vektorerne ligger i planen udspændt af de øvrige to vektorer. Dette er tilfældet netop når volumen af det udspændte parallelloipedum er 0. □

Hvis du er interesseret i en mere detaljeret gennemgang, så kan du læse mere på mathinsight.org/scalar_triple_product.

6.1.5 Perspektivering: Løsning af Ligningssystemer og Lineær Afhængighed

Betragt ligningssystemet

$$\begin{aligned}l_1: \quad a_1x + b_1y &= c_1 \\l_2: \quad a_2x + b_2y &= c_2,\end{aligned}$$

og bemærk at vi hver ligning kan tilskrive en retningsvektor $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ givet ved henholdsvis

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ a_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} b_2 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

Spørgsmålet om hvorvidt ligningssystemet har netop én løsning er da ækvivalent med spørgsmålet om hvorvidt $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ er lineært uafhængige, eftersom dette netop svarer til, at $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ peger i samme eller modsatte retning. Vi har tidligere set, at to vektorer er lineært uafhængige netop når determinanten er forskellig fra 0, hvorfor vi betragter

$$\det(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = a_2b_1 - a_1b_2 = -\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}),$$

hvor $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. Dette viser, at vi blot kan kigge på determinanten af koefficientvektorerne $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, når vi skal afgøre, hvorvidt et ligningssystem har netop én løsning.

Lad os nu forsøge at generalisere ved at betragte ligningssystemet

$$\begin{aligned}l_1: \quad a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\l_2: \quad a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\l_3: \quad a_3x + b_3y + c_3z &= d_3.\end{aligned}$$

Bemærk at vi ved at isolere c_3z i l_3 , gange l_1, l_2 med c_3 og indsætte udtrykket for c_3z og indsætte i de forlængede ligninger får

$$\begin{aligned}l'_1: \quad (a_1c_3 - a_3c_1)x + (b_1c_3 - b_3c_1)y &= c_3d_1 - c_1d_3 \\l'_2: \quad (a_2c_3 - a_3c_2)x + (b_2c_3 - b_3c_2)y &= c_3d_2 - c_2d_3.\end{aligned}$$

Som før er der netop én løsning til ovenstående ligningssystem, hvis og kun hvis determinanten af koefficientvektorerne er forskellig fra 0, hvorfor vi betragter

$$\begin{aligned}\det\left(\begin{pmatrix} a_1c_3 - a_3c_1 \\ a_2c_3 - a_3c_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1c_3 - b_3c_1 \\ b_2c_3 - b_3c_2 \end{pmatrix}\right) &= a_2b_1c_3^2 - a_3b_1c_2c_3 - a_2b_3c_1c_3 + a_3b_3c_1c_2 \\&\quad - a_1b_2c_3^2 + a_1b_3c_2c_3 + a_3b_2c_1c_3 - a_3b_3c_1c_2 \\&= c_3(a_2b_1c_3 - a_3b_1c_2 - a_2b_3c_1 - a_1b_2c_3 + a_1b_3c_2 + a_3b_2c_1) \\&= -c_3 \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}).\end{aligned}$$

Dette viser endnu en gang, at vi blot kan kigge på determinanten af koefficientvektorerne $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, når vi skal afgøre, hvorvidt ligningssystemet har netop én løsning. Denne tilgang generaliserer videre og lader os definere determinanten af vektorer i $\mathbb{R}^4$ og videre, men udregningerne bliver gradvist mere omstændige i højere dimensioner.