

Kapitel 4

Klassifikation af Funktionstyper

I det følgende præsenteres en undersøgende tilgang til introduktionen af funktioner og klassifikation af funktionstyper i gymnasiet. Først overvejer vi bredt, hvordan man kan klassificere funktioner, og her er uanede muligheder, men efter en mere præcis og grundig overvejelse drejes diskussionen i retning af den konventionelle klassifikation af funktioner i lineære funktioner, polynomier, potensfunktioner og eksponentielle udviklinger.

4.1 Kernestof

Vi indleder med at introducere et matematisk begreb, som formaliserer den intuitive fornemmelse af en proces, som givet et input producerer et output.

Definition 4.1.1. En funktion fra en mængde X til en mængde Y noteres $f: X \rightarrow Y$ og associerer til hvert element $x \in X$ netop ét element $y \in Y$. Vi skriver $y = f(x)$.

Vi siger, at X er *definitionsmængden* for f , mens Y er *codomænet*. *Værdimængden* for f noteres $V(f)$ og er givet ved

$$V(f) := \{y \in Y \mid \exists x \in X: f(x) = y\}.$$

I det følgende skal vi udelukkende fokusere på funktioner $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eller $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$. Disse funktioner har nemlig en naturlig grafisk fortolkning, hvor vi til hvert element $x \in X$ indtegner punktet $(x, f(x))$ i et koordinatsystem. Mængden af punkter

$$G(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$$

kaldes *graften* for f . Vi skal udnytte denne visualisering til at kaste lys over begrebet 'funktion', når vi begrænser os til funktioner defineret over de reelle tal. Før du læser videre opfordres du til at kaste et blik på de skitserede grafer i bilaget til dette kapitel.

4.1.1 Klassifikation af funktioner på baggrund af graf

Lad $X \subseteq \mathbb{R}$ og betragt en funktion $f: X \rightarrow \mathbb{R}$.

- Vi siger, at f er henholdsvis *voksende* eller *strengt voksende*, hvis

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2), \quad \text{eller} \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

for alle $x_1, x_2 \in X$. Vi siger, at f er henholdsvis *aftagende* eller *strengt aftagende*, hvis

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2), \quad \text{eller} \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

for alle $x_1, x_2 \in X$. Vi siger, at f er (*strengt*) *monoton*, hvis f er (strengt) voksende eller aftagende.

- Vi siger, at f er en *konveks* funktion, hvis

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)x) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(x)$$

for alle $x \in X$ og $\lambda \in [0, 1]$.

Vi siger, at f er en *konkav* funktion, hvis

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)x) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(x)$$

for alle $x \in X$ og $\lambda \in [0, 1]$.

- Vi siger, at f er henholdsvis *ikke-negativ* eller *positiv*, hvis

$$f(x) \geq 0, \quad \text{eller} \quad f(x) > 0$$

for alle $x \in X$.

Vi siger, at f er henholdsvis *ikke-positiv* eller *negativ*, hvis

$$f(x) \leq 0, \quad \text{eller} \quad f(x) < 0$$

for alle $x \in X$.

- Betragt en funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Vi siger, at f er henholdsvis *symmetrisk* eller *antisymmetrisk* omkring akse $x = s$, hvis

$$f(s - x) = f(s + x) \quad \text{eller} \quad f(s - x) = -f(s + x)$$

for alle $x \in \mathbb{R}$.

- Vi siger, at f er henholdsvis *opad begrænset* eller *nedad begrænset*, hvis der findes $M \in \mathbb{N}$ eller $m \in \mathbb{N}$, så

$$f(x) \leq M \quad \text{eller} \quad f(x) \geq m$$

for alle $x \in X$. Vi siger, at f er *begrænset*, hvis f er både opad og nedad begrænset.

- Vi siger, at f er *injektiv*, hvis der for ethvert $y \in \mathbb{R}$ findes højst ét $x \in X$, så $f(x) = y$. Med andre ord haves

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

for alle $x_1, x_2 \in X$. Vi siger, at f er *surjektiv*, hvis der for ethvert $y \in \mathbb{R}$ findes mindst ét $x \in X$, så $f(x) = y$.

Vi siger, at f er *bijektiv*, hvis der for ethvert $y \in \mathbb{R}$ findes netop ét $x \in X$, så $f(x) = y$. Bemærk at f er bijektiv, hvis og kun hvis f er *invertibel*, altså hvis og kun hvis der findes en funktion $g: \mathbb{R} \rightarrow X$, som opfylder

$$(g \circ f)(x) = x, \quad (f \circ g)(y) = y.$$

Vi siger, at g er den *inverse af* f , som noteres f^{-1} .

4.1.2 Klassifikation af funktioner på baggrund af forskrift

Typisk er funktioner $f: X \rightarrow Y$ angivet med en *forskrift*, som beskriver hvordan elementer fra X associeres til elementer i Y .

Definition 4.1.2. Vi indfører følgende typer af funktioner.

- Vi siger, at $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er en *konstant funktion*, hvis der findes $b \in \mathbb{R}$, så

$$f(x) = b$$

for alle $x \in \mathbb{R}$. Vi siger, at b er *begyndelsesværdien* for f .

- Vi siger, at $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er en *lineær funktion*, hvis der findes $a \in \mathbb{R}$, så

$$f(x) = ax$$

for alle $x \in \mathbb{R}$. Vi siger, at a er *hældningskoefficienten* for f .

- Vi siger, at $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er et *polynomium af grad* $n \in \mathbb{N}_0$, hvis der findes $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, så

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

for alle $x \in \mathbb{R}$. Vi siger, at a_i er den *i'te grads koefficient*.

- Vi siger, at $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ er en *potensfunktion*, hvis der findes $a \in \mathbb{R}$ og $b \in \mathbb{R}_+$, så

$$f(x) = b \cdot x^a$$

for alle $x \in \mathbb{R}$. Vi siger, at a er *potensen*, mens der ikke er konsensus om et navn til b .

- Vi siger, at $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er en *eksponentiel udvikling*, hvis der findes $a, b \in \mathbb{R}_+$, så

$$f(x) = b \cdot a^x$$

for alle $x \in \mathbb{R}$. Vi siger, at a er *grundtallet* og b er *begyndelsesværdien*. Når begyndelsesværdien $b = 1$ kaldes f en *eksponentialfunktion*.

- Vi siger, at $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ er en *logaritmefunktion*, hvis der findes $a \in \mathbb{R}_+$, så

$$f(x) = \log_a(x)$$

for alle $x \in \mathbb{R}$. Vi siger, at a er logaritmens *base*.

Det er værd at bemærke, at ovenstående definitioner er overlappende - én funktion sagtens kan stemme overens med flere af ovenstående definitioner. Bemærk eksempelvis at funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ med forskrift $f(x) = x$ er en både affin funktion, et polynomium af grad 1 og en potensfunktion!

4.1.3 Egenskaber ved forskellige funktionstyper

I dette afsnit beskriver vi sammenhænge mellem forskrifter for de forskellige funktionstyper og diverse egenskaber, som vi definerer herover. Alle resultater gives af hensyn til omfanget uden bevis, eftersom det hele er kanonisk gymnasiepensum.

Sætning 4.1.3 (Affine funktioner). Lad $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ være givet ved $f(x) = ax + b$, hvor $a, b \in \mathbb{R}$. Da er

- ... f strengt voksende for $a > 0$, strengt aftagende for $a < 0$ og konstant for $a = 0$.
- ... f antisymmetrisk omkring $-\frac{b}{a}$, som er skærringspunktet med x -aksen.

- ... f invertibel for $a \neq 0$ med invers $f^{-1}(y) = \frac{y-b}{a}$.

Desuden skærer grafen for f y -aksen i $(0, b)$.

Sætning 4.1.4 (2. gradspolynomier). Lad $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ være givet ved $f(x) = ax^2 + bx + c$, hvor $a, b, c \in \mathbb{R}$ og $a \neq 0$.

- Da er f symmetrisk omkring $s = -\frac{b}{2a}$, hvor funktionen tager sit minimum, hvis $a > 0$, eller sit maksimum, hvis $a < 0$. Derfor er f nedad eller opad begrænset afhængigt af fortegnet for a .
- Hvis $b^2 - 4ac \geq 0$, så skærer grafen for f x -aksen i punkterne

$$\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, 0 \right), \quad \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, 0 \right),$$

som kan være sammenfaldende for $b^2 - 4ac = 0$. Hvis $b^2 - 4ac < 0$, så skærer grafen for f ikke x -aksen.

- Hvis $a > 0$, så er f strengt aftagende på intervallet $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ og strengt voksende på intervallet $[-\frac{b}{2a}, \infty)$.
- Hvis $a < 0$, så er f strengt voksende på intervallet $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ og aftagende voksende på intervallet $[-\frac{b}{2a}, \infty)$.

Desuden skærer grafen for f y -aksen i $(0, c)$.

Sætning 4.1.5 (Potensfunktioner). Lad $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ være givet ved $f(x) = b \cdot x^a$, hvor $a \in \mathbb{R}$ og $b \in \mathbb{R}_+$. Da er

- ... f strengt voksende for $a > 0$, strengt aftagende for $a < 0$ og konstant for $a = 0$.
- ... f positiv, så specielt nedad begrænset af 0.
- ... f invertibel for $a \neq 0$ med invers $f^{-1}(y) = \sqrt[a]{b \cdot y}$.

Desuden skærer grafen for f linjen $x = 1$ i $(1, b)$.

Sætning 4.1.6 (Eksponentielle udviklinger). Lad $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ være givet ved $f(x) = b \cdot a^x$, hvor $a, b \in \mathbb{R}_+$. Da er

- ... f strengt voksende for $a > 1$, strengt aftagende for $a < 1$ og konstant for $a = 1$.
- ... f positiv, så specielt nedad begrænset af 0.
- ... f invertibel for $a \neq 1$ med invers $f^{-1}(y) = \log_a\left(\frac{y}{b}\right)$.

Desuden skærer grafen for f y -aksen i $(0, b)$.

Sætning 4.1.7 (Logaritmefunktioner). Lad $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ være givet ved $f(x) = \log_a(x)$, hvor $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$. Da er

- ... f strengt voksende for $a > 1$ og strengt aftagende for $a < 1$.
- ... f invertibel med invers $f^{-1}(y) = a^y$.

Ovenstående er ikke nødvendigvis en udtømmende beskrivelse af egenskaber ved de forskellige funktionstype, eksempelvis kan inddrages skærringspunkter med x -aksen, eller mere generelt skæringspunkter med en ret linje. Netop denne betragtning kunne være interessant, hvis man ønsker at diskutere algebraens fundamentalsætning vedrørende (komplekse) rødder for n 'te gradspolynomier.

4.1.4 Perspektivering: Funktionalligninger

Konstante, Lineære og Affine Funktioner

Det er let at se, at konstante funktioner netop er alle funktioner, der opfylder *funktionalligningen*

$$f(x) = f(y)$$

for alle $x, y \in \mathbb{R}$. Lidt mindre oplagt er det, når vi betragter lineære funktioner, men vi søger en ligning, der indfanger alle funktioner med følgende karakteristika.

- Når input skaleres med α , så skaleres output med α .
- Når input øges med y , så øges output med $f(y)$.

Resultatet herunder viser, at ovenstående karakteristika opfyldes af netop lineære funktioner.

Sætning 4.1.8. Lad $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Da findes $a \in \mathbb{R}$, så $f(x) = ax$, hvis og kun hvis f opfylder

$$f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y) \quad (4.1)$$

for alle $\alpha, x, y \in \mathbb{R}$.

Bevis. Det er let at se, at enhver lineær funktion $f(x) = ax$ for $a \in \mathbb{R}$ opfylder ligning (4.1), så betragt nu en vilkårlig funktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, som opfylder (4.1). Lad $a = g(1)$ og bemærk

$$\begin{aligned} g(x) &= g(x \cdot 1 + 0) = x \cdot g(1) + g(0) = ax + g(0) \\ g(0) &= g(-1 \cdot 0 + 0) = -1 \cdot g(0) + g(0) = 0 \end{aligned}$$

Ved at kombinere ovenstående kan vi konkludere $g(x) = ax$ for alle $x \in \mathbb{R}$. □

En lidt større klasse af funktioner er de *affine funktioner* $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, som kan konstrueres ved at lægge en lineær funktion sammen med en konstant funktion. Vi får således, at affine funktioner har forskrift $f(x) = ax + b$ for $a, b \in \mathbb{R}$, og vi kaldes a for *hældningskoefficienten* og b for *begyndelsesværdien*.

Alternativt kan vi forstå affine funktioner som den klasse af funktioner, hvor $f(x)$ vokser proportionalt med x , sagt med andre ord er

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

konstant. Dette giver anledning til følgende karakteristika af affine funktioner.

Sætning 4.1.9. Lad $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Hvis der findes $a \in \mathbb{R}$, så

$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1), \quad \text{for alle } x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \quad (4.2)$$

da er $f(x) = ax + b$, hvor $b = f(0)$.

Bevis. Det er let at se, at enhver affin funktion $f(x) = ax + b$ for $a, b \in \mathbb{R}$ opfylder ligning (4.2), så betragt nu en vilkårlig funktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, som opfylder (4.2). Ved at lade $x_1 = 0$ fås da

$$g(x) = g(x) = a(x - 0) + f(0) = ax + b,$$

hvilket viser det ønskede. □

Vi kan tænke på ovenstående som det omvendte resultat af to-punktsformlen for affine funktioner, nemlig at hvis to-punktsformlen holder for alle punkter for en funktion f , så er f en affin funktion. Alternativt kan affine funktioner realiseres som løsninger til en funktionalligning, der i højere grad afspejler fællestrækkene med lineære funktioner.

Sætning 4.1.10. Lad $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Da findes $a \in \mathbb{R}$, så $f(x) = ax$, hvis og kun hvis f opfylder

$$f(\alpha x + y) = \alpha(f(x) - f(0)) + f(y) \quad (4.3)$$

for alle $\alpha, x, y \in \mathbb{R}$.

Bevis. Udelades. □

Potensfunktioner

Lad $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ være givet ved $f(x) = x^a$, hvor $a \in \mathbb{R}$. Da er det let at se, at f opfylder funktionalligningen

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

for alle $x, y \in \mathbb{R}$, men det er bestemt ikke let at afgøre, om der er andre funktioner, som opfylder denne ligning!

Lemma 4.1.11 (Cauchy's Funktionalligning). Lad $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ være en kontinuert funktion. Da findes $a \in \mathbb{R}$, så $f(x) = ax$, hvis og kun hvis

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (4.4)$$

for alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Skitse af bevis. Det kan vises, at $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ givet ved $f(x) = ax$ for $a \in \mathbb{R}$ er de eneste funktioner, som opfylder

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{for alle } x, y \in \mathbb{Q}.$$

Når vi betragter en kontinuert funktion f , som opfylder $f(x) = ax$ for alle $x \in \mathbb{Q}$, så følger det af netop kontinuitet, at $f(x) = ax$ for alle $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Overraskende nok er det ovenstående resultat, som skal hjælpe os med at forstå potensfunktioner fra et perspektiv af funktionalligninger.

Sætning 4.1.12. Lad $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ være en kontinuert funktion. Da findes $a \in \mathbb{R}$, så $f(x) = x^a$, hvis og kun hvis

$$f(xy) = f(x)f(y) \quad (4.5)$$

for alle $x, y \in \mathbb{R}_+$.

Bevis. Definér $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ved $g(x) = \log(f(e^x))$. Da fås

$$\begin{aligned} g(x+y) &= \log(f(e^{x+y})) = \log(f(e^x \cdot e^y)) = \log(f(e^x) \cdot f(e^y)) \\ &= \log(f(e^x)) + \log(f(e^y)) = g(x) + g(y), \end{aligned}$$

hvorfor det følger af Lemma 4.1.11, at $g(x) = ax$ for $a \in \mathbb{R}$. Men da fås endelig

$$f(x) = e^{g(\log x)} = e^{a \log x} = x^a,$$

hvilket er det ønskede. $\square$

En smule mere generelt kan man med lignende teknikker vise, at de eneste kontinuerte funktioner $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, som opfylder

$$f(1)f(xy) = f(x)f(y)$$

for alle $x, y \in \mathbb{R}$ er givet ved $f(x) = b \cdot x^a$ for $a, b \in \mathbb{R}$. Ovenstående giver en formel forståelse af potensfunktioners vækstegenskaber, som kan direkte sammenlignes med lineære funktioner.

Ekspontielle udviklinger

Lad $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ være givet ved $f(x) = a^x$, hvor $a \in \mathbb{R}_+$. Da er det let at se, at f opfylder funktionalligningen

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

for alle $x, y \in \mathbb{R}$, men det er bestemt ikke let at afgøre, om der er andre funktioner, som opfylder denne ligning!

Sætning 4.1.13. Lad $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ være en kontinuert funktion, som ikke er identisk 0. Da findes $a \in \mathbb{R}_+$, så $f(x) = a^x$, hvis og kun hvis

$$f(x+y) = f(x)f(y) \quad (4.6)$$

for alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Bevis. Det er let at se, at enhver lineær funktion $f(x) = ax$ for $a \in \mathbb{R}$ opfylder ligning (4.6), så betragt en vilkårlig funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, som opfylder (4.6). Vi viser først, at $f(x) = a^x$ for alle $x \in \mathbb{N}$, dernæst alle $x \in \mathbb{Z}$ og endelig alle $x \in \mathbb{Q}$. Det følger da af antagelsen om kontinuitet, at $f(x) = a^x$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

Lad $a = f(1)$ og lad $n \in \mathbb{N}$. Da haves

$$f(n) = f(1)f(n-1) = f(1)^2 f(n-2) = \dots = f(1)^n = a^n.$$

Bemærk endvidere, at

$$f(x) = f(x+0) = f(x)f(0),$$

hvorfor vi har $f(0) = 1$. Da følger det, at

$$1 = f(0) = f(n-n) = f(n)f(-n),$$

hvorfor vi får $f(-n) = f(n)^{-1} = a^{-n}$. Dette viser $f(x) = a^x$ for alle $x \in \mathbb{Z}$.

Lad nu $p, q \in \mathbb{Z}$, og antag $q \neq 0$. Da haves

$$a = f(1) = f\left(\underbrace{\frac{1}{q} + \frac{1}{q} + \dots + \frac{1}{q}}_{q \text{ gange}}\right) = f\left(\frac{1}{q}\right)^q,$$

hvorfor vi har $f\left(\frac{1}{q}\right) = a^{1/q}$. Da fås tilsvarende

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(\underbrace{\frac{1}{q} + \frac{1}{q} + \dots + \frac{1}{q}}_{p \text{ gange}}\right) = f\left(\frac{1}{q}\right)^p = \left(a^{1/q}\right)^p = a^{p/q},$$

hvilket viser $f(x) = a^x$ for alle $x \in \mathbb{Q}$. Det følger nu, at eftersom f er kontinuert, så er $f(x) = a^x$ for alle $x \in \mathbb{R}$, hvilket er det ønskede. $\square$

En smule mere generelt kan man med lignende teknikker vise, at de eneste kontinuerte funktioner $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, som opfylder

$$f(0)f(x+y) = f(x)f(y)$$

for alle $x, y \in \mathbb{R}$ er givet ved $f(x) = b \cdot a^x$ for $a, b \in \mathbb{R}$. Ovenstående giver en formel forståelse af eksponentielle udviklingers vækstegenskaber, som kan direkte sammenlignes med lineære funktioner.

Sætning 4.1.14. Lad $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ være en kontinuert funktion, som ikke er identisk 0. Da findes $a \in \mathbb{R}$, så $f(x) = a \ln x$, hvis og kun hvis

$$f(xy) = f(x) + f(y) \quad (4.7)$$

for alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Bevis. Lad f være en funktion, som opfylder (4.7) og betragt funktionen $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ givet ved $g(x) = f(e^x)$. Da haves

$$g(x+y) = f(e^{x+y}) = f(e^x \cdot e^y) = f(e^x) + f(e^y) = g(x) + g(y).$$

Vi bemærker således, at g opfylder Cauchy's Funktionalligning beskrevet i Lemma 4.1.11, hvorfor der findes $a \in \mathbb{R}$, så $g(x) = ax$ for alle $x \in \mathbb{R}$. Da logaritmefunktionen er invers til eksponentialfunktionen, følger det at

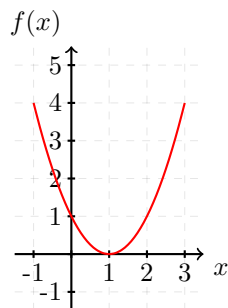
$$f(x) = f(e^{\ln x}) = g(\ln x) = a \ln x,$$

hvilket viser det ønskede.

Den modsatte implikation er blot logaritmeregnereglen $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, hvorfor argumentet udelades her. $\square$

4.2 Bilag

Figur 4.1: Grafen for en funktion



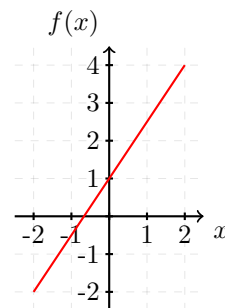
Udfyld nedenstående sildeben ved at aflæse på grafen.

x							
$f(x)$							

og brug dette til at finde en forskrift for f .

$$f(x) =$$

Figur 4.3: Grafen for en funktion



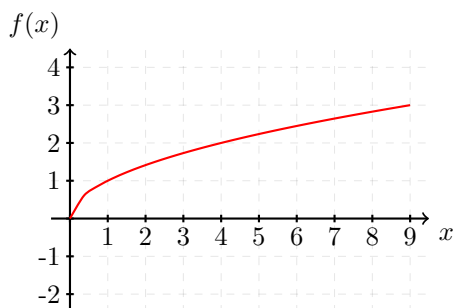
Udfyld nedenstående sildeben ved at aflæse på grafen.

x							
$f(x)$							

og brug dette til at finde en forskrift for f .

$$f(x) =$$

Figur 4.2: Grafen for en funktion



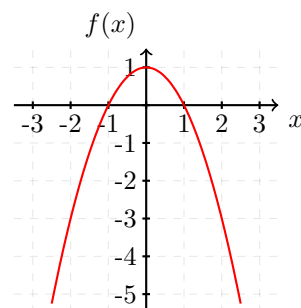
Udfyld nedenstående sildeben ved at aflæse på grafen.

x							
$f(x)$							

og brug dette til at finde en forskrift for f .

$$f(x) =$$

Figur 4.4: Grafen for en funktion



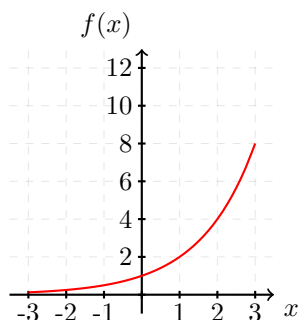
Udfyld nedenstående sildeben ved at aflæse på grafen.

x							
$f(x)$							

og brug dette til at finde en forskrift for f .

$$f(x) =$$

Figur 4.5: Grafen for en funktion



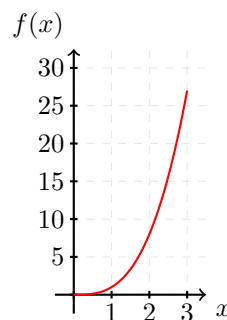
Udfyld nedenstående sildeben ved at aflæse på grafen.

x							
$f(x)$							

og brug dette til at finde en forskrift for f .

$f(x) =$

Figur 4.7: Grafen for en funktion



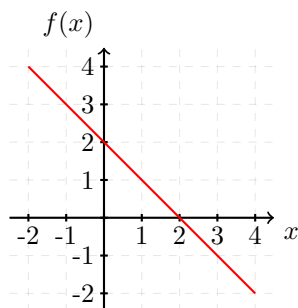
Udfyld nedenstående sildeben ved at aflæse på grafen.

x							
$f(x)$							

og brug dette til at finde en forskrift for f .

$f(x) =$

Figur 4.6: Grafen for en funktion



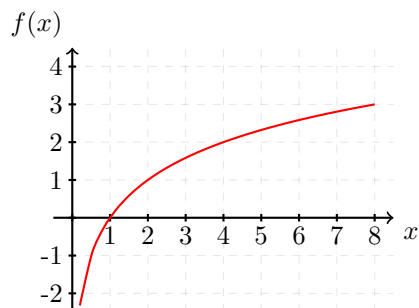
Udfyld nedenstående sildeben ved at aflæse på grafen.

x							
$f(x)$							

og brug dette til at finde en forskrift for f .

$f(x) =$

Figur 4.8: Grafen for en funktion



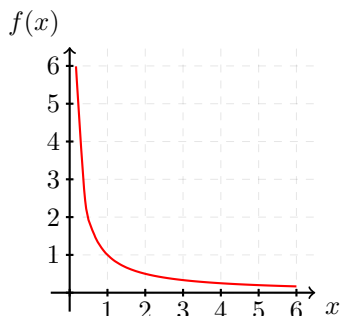
Udfyld nedenstående sildeben ved at aflæse på grafen.

x							
$f(x)$							

og brug dette til at finde en forskrift for f .

$f(x) =$

Figur 4.9: Grafen for en funktion



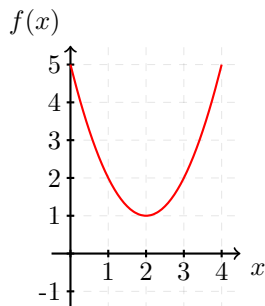
Udfyld nedenstående sildeben ved at aflæse på grafen.

x					
$f(x)$					

og brug dette til at finde en forskrift for f .

$f(x) =$

Figur 4.10: Grafen for en funktion



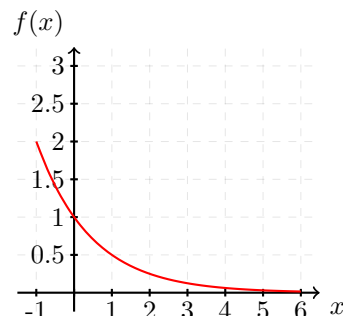
Udfyld nedenstående sildeben ved at aflæse på grafen.

x					
$f(x)$					

og brug dette til at finde en forskrift for f .

$f(x) =$

Figur 4.11: Grafen for en funktion



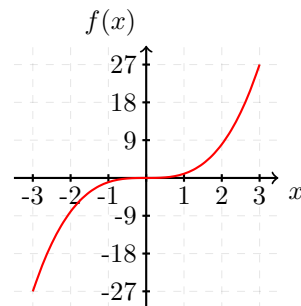
Udfyld nedenstående sildeben ved at aflæse på grafen.

x					
$f(x)$					

og brug dette til at finde en forskrift for f .

$f(x) =$

Figur 4.12: Grafen for en funktion



Udfyld nedenstående sildeben ved at aflæse på grafen.

x					
$f(x)$					

og brug dette til at finde en forskrift for f .

$f(x) =$