

## Arealer og Integration

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Forfatter                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | <i>Mads Friis Frand-Madsen, TalentCampDK</i>                                                                                                                                                                                                                                  |
| Tilsigtede viden                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | <i>Målet er, at eleverne får en intuitiv og formel motivation for definitionen af integration og dennes naturlige sammenhæng med arealer.</i>                                                                                                                                 |
| Bredere kompetencemål                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | <i>Det bredere fagfaglig formål er at opnå en dybere forståelse af begrebet integration.<br/>Det bredere metodiske formål er at styrke elevernes evne til at formulere præcise iagttagelser, argumentere med udgangspunkt i konkrete og eventuelt abstrakte beskrivelser.</i> |
| Nødvendige matematiske forudsætninger                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | <i>Eleverne har kendskab til begreber som kontinuerte funktioner samt grænseværdier. Desuden er et kendskab til klassisk geometri, særligt arealberegning ønskværdigt.</i>                                                                                                    |
| Niveau                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | <i>17-19 år afhængig af præsentation og grad af åbenhed.</i>                                                                                                                                                                                                                  |
| Tid                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | <i>2 lektioner (45 min)</i>                                                                                                                                                                                                                                                   |
| Materialer til rådighed                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | <i>Skitse af forskellige figurer i planen.</i>                                                                                                                                                                                                                                |
| <b>Problemstilling:</b><br><i>Eleverne præsenteres for adskillige figurer i planen, og vi undersøger en kvalitativ udregning af arealet af de forskellige figurer. Hermed menes, at vi beskriver, <u>hvordan</u> arealet af en given figur beregnes, og ikke den konkrete udregning med givne mål. Vi fortsætter til at skelne geometrisk definerede og analytisk definerede figurer.</i> |                                                                                                                                                                                                                                                                               |

| Fase                                             | Lærerens handlinger inklusiv instruktioner                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | Elevernes handlinger og reaktioner                                                                                                                                    | Observationer fra implementeringen |
|--------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------|
| Devolution<br>(didaktisk)<br><i>5 minutter</i>   | Læreren præsenterer eleverne for en række geometrisk og analytisk definerede figurer (se vedlagt materiale). Alle er figurer i planen, og eleverne bedes overveje, <i>hvordan</i> man kan udregne arealet af de forskellige figurer (ikke <i>hvilke</i> figurer man kan regne arealet af).<br>Eleverne inddeles i grupper af fire og oplyses om, at de skal formulere deres iagttagelser tydeligt med henblik på senere deling i plenum. | Eleverne lytter og stiller opklarende spørgsmål.                                                                                                                      |                                    |
| Handling (adidaktisk)<br><i>10 minutter</i>      | Læreren observerer eleverne og identificerer grupper, som identificerer mange/få geometrisk definerede figurer og kender deres arealformler.<br>Læreren svarer desuden på opklarende spørgsmål.                                                                                                                                                                                                                                          | Eleverne starter med at identificere geometrisk definerede figurer og angiver deres arealformel. Dernæst fortsætter de til at diskutere analytisk definerede figurer. |                                    |
| Formulering<br>(didaktisk)<br><i>10 minutter</i> | I plenum opsamles elevernes iagttagelser, herunder formler for geometrisk definerede figurers areal samt forskellige ad hoc argumenter eller approksimerende betragtninger vedrørende de analytisk formulerede figurer.<br>Elevernes opmærksomhed henledes på forskellen mellem geometrisk og analytisk definerede figurer.                                                                                                              | Eleverne lytter og indgår aktivt i en plenumsdiskussion.                                                                                                              |                                    |

|                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                       |  |
|----------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| <p>Devolution<br/>(didaktisk)<br/><i>10 minutter</i></p> | <p>Ved simple eksempler viser læreren, at geometriske figurer kan konstrueres ved hjælp af analytiske værktøjer. Med andre ord kan geometrisk figurer ses som et specialtilfælde af analytiske figurer.</p> <p>Læreren præsenterer det simple problem at bestemme arealet under <math>f(x) = x^2</math> på intervallet fra 0 til 1. Eleverne gøres opmærksomme på, at når vi ikke har en eksakt formel, så er vi nødt til at approksimere arealet – men hvordan?</p> <p>Eleverne inddeles i samme grupper som før. Det er vigtigt at opfordre eleverne til at komme med <i>mange</i> forslag til måder at approksimere, også <i>dårlige</i> forslag.</p> | <p>Eleverne lytter og stiller opklarende spørgsmål.</p>                                                                                                                                                                                               |  |
| <p>Handling (adidaktisk)<br/><i>15 minutter</i></p>      | <p>Læreren observerer eleverne og svarer på opklarende/åbnende spørgsmål. Læreren bemærker, hvilke grupper har mange/få forslag til approksimation.</p> <p>Læreren kan problematisere opgaven ved at spørge til formeludtryk for approksimationen eller bede eleverne vurdere, hvilke approksimationsstrategier er bedst og hvorfor.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | <p>Eleverne arbejder i grupper af fire og giver forskellige bud på at approksimere arealet. De forsøger herefter at finde et formeludtryk for deres approksimationsstrategier og/eller vurdere hvilke strategi, der er en den bedste, og hvorfor.</p> |  |

## Arealer og Integration

|                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                  |  |
|-----------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|--|
| Formulering<br>(didaktisk)<br><i>15 minutter</i>          | I plenum præsenteres elevernes approksimationsstrategier, som samles i et skema med plads til at angive et formeludtryk og fordele/ulemper.<br>Det diskuteres, om alle strategier bliver bedre i den forstand, at de tilnærmer sig arealet, når inddelingen bliver finere.<br>Desuden kan approksimationerne eventuelt rangeres fra mindste til største. | Eleverne lytter og indgår aktivt i diskussionen. |  |
| Validering<br>(didaktisk)<br><i>20 minutter</i>           | Læreren viser, at alle fornuftige strategier approksimerer arealet ved at vise, at forskellen på undersum og oversum går mod 0. Dette kan vises for $f(x) = x^2$ eller en generel kontinuert funktion.                                                                                                                                                   | Eleverne lytter og stiller opklarende spørgsmål. |  |
| Institutionalisering<br>(didaktisk)<br><i>20 minutter</i> | Integralet defineres som grænseværdien for undersummerne over en ækvidistant inddeling, hvor finheden går mod 0. Dette retfærdiggøres af valideringen.                                                                                                                                                                                                   | Eleverne lytter og stiller opklarende spørgsmål. |  |

|                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|----------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Mulige veje eleverne vil opnå den tilsigtede viden | <ul style="list-style-type: none"> <li>- <i>Der arbejdes udelukkende med papir og blyant.</i></li> <li>- <i>Elever, som har svært ved at abstrahere generelle strategier kan tage udgangspunkt i konkrete figurer til arealberegning og herefter opfordres til at søge et mønster.</i></li> </ul> |
| Evalueringsværktøjer                               | -                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| Liste over yderligere materialer                   | <ul style="list-style-type: none"> <li>- <i>Videogennemgang af bevis for forskel på undersum og oversum.</i></li> <li>- <i>Ark med adskillige geometrisk og analytisk definerede figurer.</i></li> <li>- <i>Videopræsentation af mulige variationer.</i></li> </ul>                               |