

Kapitel 6

Lineær Algebra i Planen

I det følgende præsenteres en undersøgende tilgang til forbindelserne mellem linjer i planen i Geometri, ligningsløsning og løsningsmængder i Algebra og vektorer og lineær uafhængighed i Vektorrum. Undersøgelsen kredser om en grundig overvejelse af parallelitet, særligt et forsøg på at gradbøje begrebet ‘parallel’. Det faglige indhold og det undersøgende arbejde placeres naturligt som afsluttende på et forløb om vektorer i 2. eller 3.g, eventuelt som introducerende for definitionen af determinanten.

6.1 Lineær Afhængighed i Planen

Vi indleder med at introducere et matematisk begreb, som formaliserer det intuitive billede af parallelitet af linjer i en kontekst af vektorer.

Definition 6.1.1. Lad $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$. Vi siger, at $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ er *lineært afhængige*, hvis der findes $x, y \in \mathbb{R}$ så

$$x\mathbf{a} + y\mathbf{b} = \mathbf{0}$$

hvor x, y ikke begge er 0. Hvis $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ikke er lineært afhængige, så siger vi, at de er *lineært uafhængige*.

I to dimensioner kan vi visualisere ovenstående som følger; to vektorer er lineært afhængige, netop hvis de peger i samme eller modsatte retning. Denne iagttagelse kan bidrage til at kvantificere i hvor høj grad to vektorer er lineært afhængige baseret på intuitionen, at to vektorer kan pege i næsten samme eller modsatte retning (svarende til at være tæt på at være lineært afhængige), eller to vektorer kan pege i vinkelrette retninger (svarende til at være langt fra at være lineært afhængige). Vi gør dette mere præcist herunder.

Miljø. Lad $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ være givet som

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Vi søger et *mål* $D: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, som kvantificerer i hvor høj grad to vektorer er lineært uafhængige. Vi bygger vores undersøgelse på intuitionen, at to vektorer kan være tæt på eller langt fra at være lineært uafhængige. Der skal med andre ord gælde følgende om $D(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ for $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$.

- Hvis $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ er lineært uafhængige, så skal der gælde $D(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$.
- Hvis $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ er tæt på at være lineært afhængige, så skal $D(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ være tæt på 0.
- Hvis $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ er langt fra lineært afhængige, så skal $D(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ være langt fra 0.

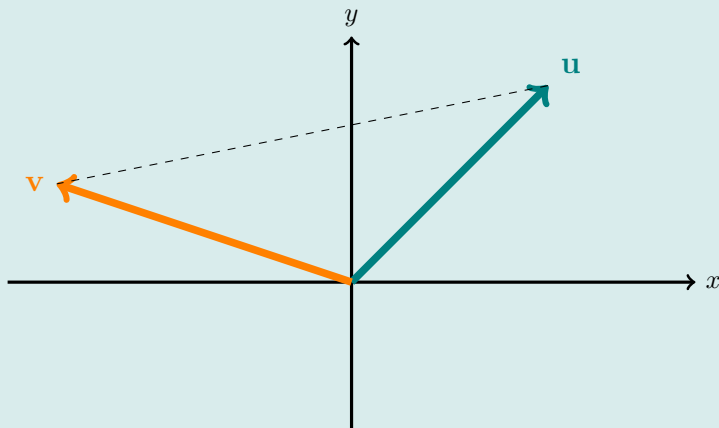
◦

Der er adskillige fornuftige bud på et mål $D: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, som beskriver i hvor høj grad to vektorer er lineært uafhængige, og herunder beskriver vi tre naturlige kandidater.

6.1.1 Euklidisk afstand i $\mathbb{R}^2$

Definition 6.1.2 (Afstand mellem vektorer). Lad $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$. Da er *afstanden mellem to vektorer* givet ved

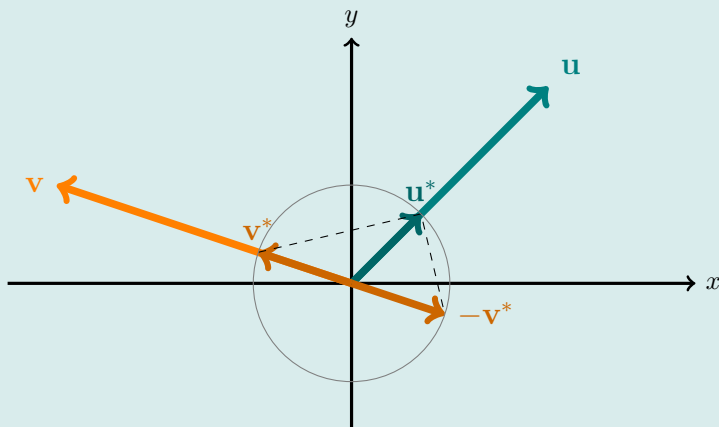
$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2}.$$



Som mål for hvor tætte to vektorer er på at være lineært afhængige har afstanden mellem vektorer umiddelbart to mangler, nemlig

- 1) To vektorer med samme retning, men forskellige længder, har afstand større end 0, selv om de er lineært afhængige.
- 2) To *næsten* modsatrettede vektorer vil have relativt stor afstand, selv om de *næsten* er lineært afhængige.

For at imødegå det første kritikpunkt kan vi normere vektorerne, altså betragte afstanden mellem $\mathbf{u}^* = \mathbf{u} / \|\mathbf{u}\|$ og $\mathbf{v}^* = \mathbf{v} / \|\mathbf{v}\|$ i stedet. For at imødegå det andet kritikpunkt vil vi tage den mindste af afstandene mellem $\mathbf{u}^*$ og $\mathbf{v}^*$ samt $\mathbf{u}^*$ og spejling af $\mathbf{v}^*$ i origo, altså $-\mathbf{v}^*$. Grafisk kan vi ved at indtegne en grå enhedscirkel fremstille situationen som vist herunder.



Formelt er det fremkomne mål $D: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ givet ved

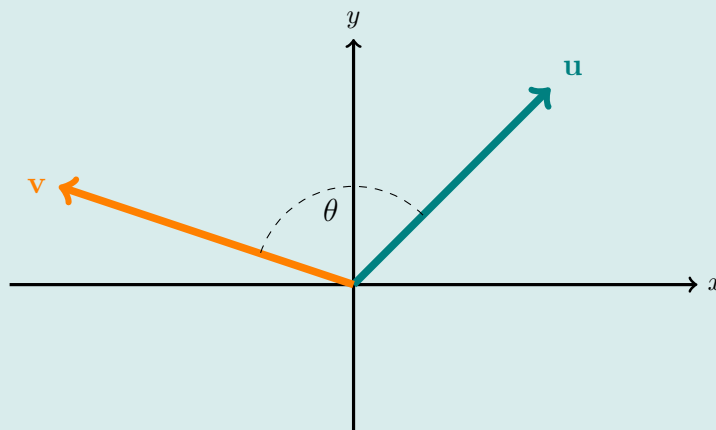
$$D(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \min \{ \|\mathbf{u}^* - \mathbf{v}^*\|, \|\mathbf{u}^* + \mathbf{v}^*\| \} = \sqrt{2 - 2 \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}},$$

hvilket følger af omstændige, men elementære udregninger.

6.1.2 Vinkler i $\mathbb{R}^2$

Definition 6.1.3 (Vinkel mellem vektorer). Lad $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$. Da opfylder *vinklen* θ mellem $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ligningerne

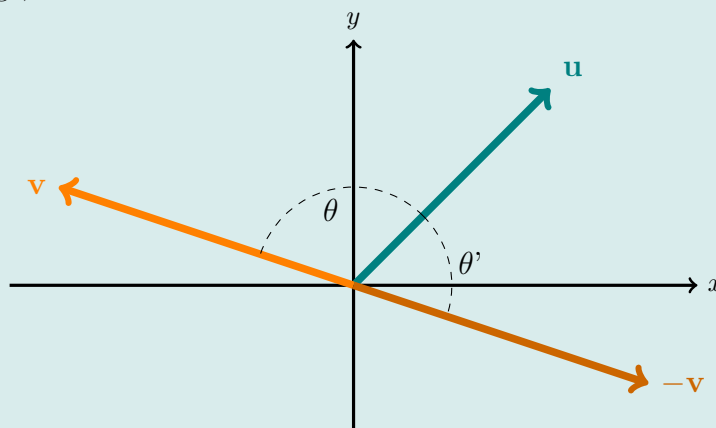
$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}, \quad \sin \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{v}}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}.$$



Som mål for hvor tætte to vektorer er på at være lineært afhængige har vinklen mellem vektorer umiddelbart én mangel, nemlig

- 1) To (næsten) modsatrettede vektorer udspænder en på (næsten) 180° eller π radianer, selv om de (næsten) er lineært afhængige.

For at imødekomme dette kritikpunkt vil vi tage den mindste af vinklerne mellem $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ samt $\mathbf{u}$ og spejlingen af $\mathbf{v}$ i origo, altså $-\mathbf{v}$. Grafisk kan vi fremstille situationen som vist herunder.



Formelt er det fremkomne mål $D: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ givet ved

$$\begin{aligned} D(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= \min \{\theta, \theta'\} = \min \left\{ \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \right), \cos^{-1} \left(-\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \right) \right\} \\ &= \min \left\{ \sin^{-1} \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{v}}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \right), \sin^{-1} \left(-\frac{\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{v}}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \right) \right\} \end{aligned}$$

Afslutningsvis kan vi meget højtflyvende bemærke, at den mindste vinkel af θ, θ' altid er mindre end eller lig $\pi/2$ radianer. I intervallet $[0, \pi/2]$ er $\sin \theta \simeq \theta$ en rimelig approximation, hvorfor

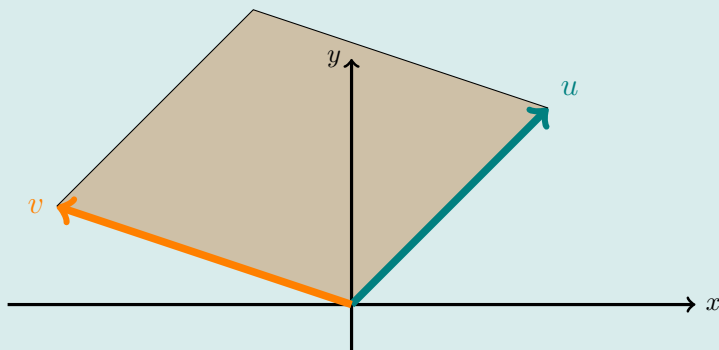
$$D_{\text{alt}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \frac{|\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{v}}|}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$$

kan formodes ligeledes at være et fornuftigt mål.

6.1.3 Arealer i $\mathbb{R}^2$

Definition 6.1.4 (Parallellogram udspændt af vektorer). Lad $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$. Da er *parallellogrammet udspændt af $\mathbf{u}, \mathbf{v}$* givet ved

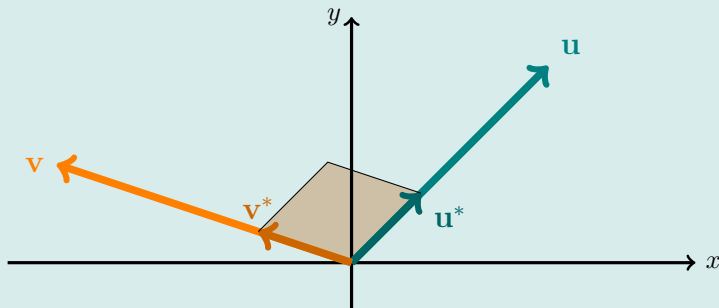
$$\text{Para}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \{x\mathbf{u} + y\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in [0, 1]\}.$$



Som mål for hvor tætte to vektorer er på at være lineært afhængige har arealet udspændt af vektorerne umiddelbart én mangel, nemlig

- 1) Arealet af den udspændte trekant afhænger ikke blot af vektorernes *retning*, men også af deres *længde*.

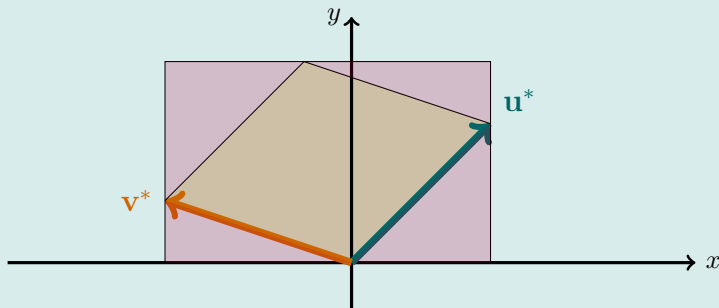
For at imødekomme dette kritikpunkt vil vi normere vektorerne, altså betragte arealet af parallellogrammet udspændt af $\mathbf{u}^* = \mathbf{u} / \|\mathbf{u}\|$ og $\mathbf{v}^* = \mathbf{v} / \|\mathbf{v}\|$. Grafisk kan vi fremstille situationen som vist herunder.



Formelt er det fremkomne mål $D: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ givet ved

$$D(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \min\{\theta, \theta'\} = \text{Areal}(\text{Para}(\mathbf{u}, \mathbf{v})) = \frac{|\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{v}}|}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|},$$

hvilket kan udregnes ved at betragte et omskrevet rektangel og udregne arealet af komplementærfiguren med hensyn til dette omskrevne rektangel, som indikeret herunder.



Afslutningsvis bemærker vi, at det fremkomne mål har en direkte parallell til D_{alt} , som vi beskrev i afsnittet om Vinkler i $\mathbb{R}^2$.

6.1.4 Perspektivering: Lineær Afhængighed i Rummet

I det følgende forudsætter vi yderligere kendskab til krydsproduktet af vektorer i $\mathbb{R}^3$, altså

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ -(a_1 b_3 - a_3 b_1) \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix},$$

samt at $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ udgør arealet af parallellogrammet udspændt af $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ i $\mathbb{R}^3$. Det er desuden nødvendigt at kende til projektionen af en vektor $\mathbf{a}$ på en vektor $\mathbf{b}$, mere præcist

$$\text{proj}_{\mathbf{b}}(\mathbf{a}) := \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|^2} \mathbf{b}.$$

Vi generaliserer umiddelbart definitionen af lineær afhængighed til 3 dimensioner.

Definition 6.1.5. Lad $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$. Vi siger, at $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ er *lineært afhængige*, hvis der findes $x, y, z \in \mathbb{R}$ så

$$x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c} = \mathbf{0}$$

hvor x, y, z ikke alle er 0. Hvis $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ ikke er lineært afhængige, så er de *lineært uafhængige*.

Som inspiration for definitionen af et mål for graden lineær uafhængighed betragter vi volumen af det 3-dimensionale objekt udspændt af tre vektorer i $\mathbb{R}^3$, mere præcist parallelloipedummet defineret herunder.

Definition 6.1.6. Lad $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$. Vi definerer *parallelloipedummet* udspændt af de tre vektorer som

$$\text{Parapip}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) := \left\{ x \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \in [0, 1] \right\}.$$

Vi bestemmer nu et formeludtryk volumen af et parallelloipedum.

Sætning 6.1.7. Lad $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$. Da er volumen af parallelloipedummet udspændt af $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ givet ved

$$\text{Vol}(\text{Parapip}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})) = |a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1|.$$

Bevis. Vi bemærker først, at arealet af parallellogrammet udspændt af $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ er givet ved $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$. Eftersom $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ er normal på planen udspændt af $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, så er højden af parallelloipedummet netop længden af projektionen af $\mathbf{c}$ på $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, altså

$$\|\text{proj}_{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}(\mathbf{c})\| = \frac{|\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})|}{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2} \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \frac{|\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})|}{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|}.$$

Det følger således, at volumen af parallelloipedummet er

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\text{Parapip}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})) &= \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| \cdot \|\text{proj}_{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}(\mathbf{c})\| = |\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})| \\ &= |a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1|, \end{aligned}$$

hvilket viser det ønskede. □

Definition 6.1.8. Lad $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$. Da er *determinanten* $\det: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ givet ved

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) := a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1.$$

Korollar 6.1.9. Betragt tre vektorer

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Da er $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ lineært afhængige, hvis og kun hvis $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$.

Bevis. Bemærk at $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ er lineært afhængige, hvis og kun hvis én af vektorerne ligger i planen udspændt af de øvrige to vektorer. Dette er tilfældet netop når volumen af det udspændte parallelloipedum er 0. □

Hvis du er interesseret i en mere detaljeret gennemgang, så kan du læse mere på mathinsight.org/scalar_triple_product.

6.1.5 Perspektivering: Løsning af Ligningssystemer og Lineær Afhængighed

Betragt ligningssystemet

$$\begin{aligned}l_1: \quad a_1x + b_1y &= c_1 \\l_2: \quad a_2x + b_2y &= c_2,\end{aligned}$$

og bemærk at vi hver ligning kan tilskrive en retningsvektor $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ givet ved henholdsvis

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ a_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} b_2 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

Spørgsmålet om hvorvidt ligningssystemet har netop én løsning er da ækvivalent med spørgsmålet om hvorvidt $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ er lineært uafhængige, eftersom dette netop svarer til, at $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ peger i samme eller modsatte retning. Vi har tidligere set, at to vektorer er lineært uafhængige netop når determinanten er forskellig fra 0, hvorfor vi betragter

$$\det(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = a_2b_1 - a_1b_2 = -\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}),$$

hvor $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. Dette viser, at vi blot kan kigge på determinanten af koefficientvektorerne $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, når vi skal afgøre, hvorvidt et ligningssystem har netop én løsning.

Lad os nu forsøge at generalisere ved at betragte ligningssystemet

$$\begin{aligned}l_1: \quad a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\l_2: \quad a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\l_3: \quad a_3x + b_3y + c_3z &= d_3.\end{aligned}$$

Bemærk at vi ved at isolere c_3z i l_3 , gange l_1, l_2 med c_3 og indsætte udtrykket for c_3z og indsætte i de forlængede ligninger får

$$\begin{aligned}l'_1: \quad (a_1c_3 - a_3c_1)x + (b_1c_3 - b_3c_1)y &= c_3d_1 - c_1d_3 \\l'_2: \quad (a_2c_3 - a_3c_2)x + (b_2c_3 - b_3c_2)y &= c_3d_2 - c_2d_3.\end{aligned}$$

Som før er der netop én løsning til ovenstående ligningssystem, hvis og kun hvis determinanten af koefficientvektorerne er forskellig fra 0, hvorfor vi betragter

$$\begin{aligned}\det\left(\begin{pmatrix} a_1c_3 - a_3c_1 \\ a_2c_3 - a_3c_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1c_3 - b_3c_1 \\ b_2c_3 - b_3c_2 \end{pmatrix}\right) &= a_2b_1c_3^2 - a_3b_1c_2c_3 - a_2b_3c_1c_3 + a_3b_3c_1c_2 \\&\quad - a_1b_2c_3^2 + a_1b_3c_2c_3 + a_3b_2c_1c_3 - a_3b_3c_1c_2 \\&= c_3(a_2b_1c_3 - a_3b_1c_2 - a_2b_3c_1 - a_1b_2c_3 + a_1b_3c_2 + a_3b_2c_1) \\&= -c_3 \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}).\end{aligned}$$

Dette viser endnu en gang, at vi blot kan kigge på determinanten af koefficientvektorerne $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, når vi skal afgøre, hvorvidt ligningssystemet har netop én løsning. Denne tilgang generaliserer videre og lader os definere determinanten af vektorer i $\mathbb{R}^4$ og videre, men udregningerne bliver gradvist mere omstændige i højere dimensioner.