

Kapitel 2

Tallene som Byggesten

I det følgende præsenteres en undersøgende tilgang til elementære strukturer i de hele tal. Nærmere bestemt skal vi se nærmere på, hvordan et eller flere tal kan bruges til additivt at generere nye tal - nemlig ved at lægge dem sammen. Der dukker utroligt mange fundamentale begreber og koncepter op i denne undersøgelse, herunder divisorer, indbyrdes primiske talpar, Fibonacci talfølgen. Herefter ser vi på, hvordan tal kan bruges til multiplikativt at generere nye tal - nemlig ved at gange dem sammen. Igen dukker elementære koncepter op, herunder primtal og faktorisering af heltal. Det faglige indhold orienterer sig med grundlæggende talforståelse, som kan placeres på alle niveauer.

Miljø. Lad være givet fem bunker med linjestykker af længde henholdsvis 2, 3, 4, 5 og 6 som vist herunder



Vi vil i det følgende undersøge, hvilke geometriske konstruktioner, der kan bygges heraf, særligt hvis vi begrænser os til at bygge med kun to forskellige slags linjestykker. ◦

2.1 Kernestof

Med udgangspunkt i et begrænset antal naturlige tal vil vi først undersøge, hvilke heltal man konstruere heraf ved at addere og subtrahere de i udgangspunktet givne tal et endeligt antal gange. Mere præcist introducerer vi følgende begreber.

Definition 2.1.1. Lad $a, b \in \mathbb{N}$. Vi siger, at vi kan *konstruere* $m \in \mathbb{N}_0$ ud fra $\{a, b\}$, hvis der findes $x, y \in \mathbb{N}$, så

$$m = ax + by.$$

Hvis alle på nær endeligt mange $m \in \mathbb{N}$ kan konstrueres ud fra $\{a, b\}$, da udgør $\{a, b\}$ et *additivt fundament* for $\mathbb{N}$.

Det er umiddelbart let at se, at alle talpar $\{1, a\}$ udgør et perfekt additivt fundament for $\mathbb{N}$, eftersom

$$1 = 1 \cdot 1 + a \cdot 0, \quad 2 = 1 \cdot 2 + a \cdot 0, \quad 3 = 1 \cdot 3 + a \cdot 0, \quad \dots$$

Det er imidlertid ikke alle talpar, der udgør et additivt fundament for $\mathbb{N}$, betragt eksempelvis $\{4, 6\}$. For alle $x, y \in \mathbb{N}$ haves

$$4x + 6y = 2(2x + 3y),$$

hvorfor de ulige tal *ikke* kan konstrueres af $\{4, 6\}$. Spørgsmålet som formuleret af Frobenius herunder opklarer situationen betydeligt.

Sætning 2.1.2 (Frobenius' Frimærker). Lad $a, b \in \mathbb{N}$ og antag $\gcd(a, b) = 1$. Da er

$$N = ab - a - b$$

det største positive heltal, som ikke kan konstrueres af $\{a, b\}$.

Bevis. Et generelt bevis udelades af hensyn til omfang, men vi viser resultatet for $b = a - 1$. Bemærk først, at

$$N + 1 = a(a - 1) - a - (a - 1) + 1 = a^2 - 3a + 2 = (a - 1)(a - 2)$$

kan konstrueres som vist. For $k = 0, 1, \dots, a - 2$ have

$$N + 1 + k = (a - 1)(a - 2 - k) + ak,$$

hvorfor vi har konstrueret $a - 1$ på hinanden følgende heltal. Ethvert større heltal kan således konstrueres ved at lægge $a - 1$ til et af disse tal et passende antal gange. Dette viser, at alle positive heltal større end N kan konstrueres af $\{a, a - 1\}$.

Antag nu at N faktisk kan konstrueres af $\{a, a - 1\}$. Da findes $x, y \in \mathbb{Z}$, så

$$ax + (a - 1)y = N = a(a - 1) - a - (a - 1),$$

som kan omskrives til både

$$a(x + y - a + 3) = y + 1 \quad \text{og} \quad (a - 1)(x + y - a + 2) = x + 1.$$

Af den første lighed bemærker vi, at $a \mid y + 1$, hvorfor $a \leq y + 1$, og af den anden ulighed bemærker vi $(a - 1) \mid x + 1$, hvorfor $a - 1 \leq x + 1$. Det følger således, at

$$ax + (a - 1)y \geq a(a - 2) + (a - 1)(a - 1) = 2a(a - 1) - a - (a - 1) > a(a - 1) - a - (a - 1) = N,$$

hvilket viser, at N ikke kan konstrueres ud fra $\{a, a - 1\}$. $\square$

Ovenstående diskussion af additive byggesten for $\mathbb{N}$ har naturlige udvidelser til såvel større delmængder end blot $\{a, b\}$ som til alle heltallene $\mathbb{Z}$. Udbygningen af Frobenius' Frimærker er Bezout's identitet, som er formuleret herunder, og begge resultater kan generaliseres til større delmængder af $\mathbb{N}$ eller $\mathbb{Z}$ end $\{a, b\}$.

Sætning 2.1.3 (Bezout's Identitet). Lad $a, b \in \mathbb{Z}$. Da findes $x, y \in \mathbb{Z}$, så

$$ax + by = \gcd(a, b),$$

hvor $\gcd(a, b)$ noterer den *største fælles divisor* i a, b .

Bevis. Et generelt bevis udelades af hensyn til omfang, men bemærk at specialtilfældet vist i Frobenius' Frimærker er trivielt vist ved at vælge $x = 1$ og $y = -1$. $\square$

Vi forlader nu det additive domæne og vil fokusere på de multiplikative byggesten for $\mathbb{N}$, hvor vi vil undersøge hvilke heltal man kan konstruere ved at multiplicere nogle på forhånd givne tal et endeligt antal gange. Mere præcist introducerer vi følgende begreb.

Definition 2.1.4. Lad $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{N}$. Vi siger, at vi kan *faktorisere* $m \in \mathbb{N}$ med $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, hvis der findes $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{N}_0$, så

$$m = a_1^{x_1} \cdot a_2^{x_2} \cdot \dots \cdot a_k^{x_k}.$$

Hvis alle på nær endeligt mange $m \in \mathbb{N}$ kan konstrueres ud fra $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, da udgør $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ et *multiplikativt fundament* for $\mathbb{N}$.

Det er umiddelbart let at se, at 1 ingen indflydelse har på, om en delmængde $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ er et multiplikativt fundament for $\mathbb{N}$. Det er ligeledes let at se, at ikke alle delmængder udgør et multiplikativt fundament for $\mathbb{N}$, betragt eksempelvis $\{2, 3\}$. For alle $x, y \in \mathbb{N}_0$ have, at tallene

$$2^x \cdot 3^y$$

altid ligger i 2-tabellen eller 3-tabellen (eller lig med 1), og der findes uendeligt mange naturlige tal, som ikke gør dette - betragt eksempelvis $5 + 6k$ for ethvert $k \in \mathbb{N}_0$.

Sætning 2.1.5. Lad $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{N}$. Da udgør $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ *ikke* et multiplikativt fundament for $\mathbb{N}$.

Bevis. Lad $A = a_1 a_2 \dots a_k$ og definér for $m \in \mathbb{N}$ tallene $N_m = 1 + Am$. Antag for modstrid, at N_m kan skrives som

$$1 + Am = N_m = a_1^{x_1} a_2^{x_2} \dots a_k^{x_k}, \quad x_i \in \mathbb{N}_0,$$

hvorfor vi har $a_1^{x_1} a_2^{x_2} \dots a_k^{x_k} - Am = 1$. Hvis $x_i \geq 1$ følger det således, at

$$a_i \mid (a_1^{x_1} a_2^{x_2} \dots a_k^{x_k} - Am) = 1,$$

hvorfor vi har $a_i = 1$. Hvis $x_i = 0$ får vi $a_i^{x_i} = 1$, så uanset hvilket tilfælde kan vi konkludere

$$N_m = a_1^{x_1} a_2^{x_2} \dots a_k^{x_k} = 1$$

for alle $m \in \mathbb{N}$, hvilket er en modstrid, da $A \neq 0$. □

Ikke overraskende er det netop de naturlige tal med relativt få divisorer, som er relativt svære at faktorisere i ovenstående forstand. Da ethvert tal $m \in \mathbb{N}$ har de trivielle divisorer 1 og m selv, så beskriver følgende definition netop de tal, som intuitivt er sværest at faktorisere multiplikativt.

Definition 2.1.6. Lad $p \in \mathbb{N}$. Vi siger, at p er et *primal*, hvis $p > 1$ kun har de trivielle divisorer 1 og p . Lad $\mathbb{P}$ notere mængden af alle primal.

Følgende resultat præciserer vores intuition vedrørende vanskeligheden ved at konstruere primal multiplikativt.

Lemma 2.1.7. Lad $A = \{a_1, a_2, \dots\} \subseteq \mathbb{N}$ og lad p være et primal, som ikke er indeholdt i A . Da kan p ikke faktorerises ud fra A .

Bevis. Antag for modstrid $p = a_1^{x_1} a_2^{x_2} \dots a_k^{x_k}$ for $x_i \geq 1$. Da haves $a_i \mid p$, hvorfor det følger at $a_i = 1$, eftersom p ikke er indeholdt i A . Men da fås $p = 1$, hvilket er en modstrid. □

Som en konsekvens af ovenstående resultat kan vi bemærke, at ethvert multiplikativt fundament for $\mathbb{N}$ skal indeholde samtlige primal. Vi viser nu, at primtallene udgør et multiplikativt fundament.

Theorem 2.1.8. Mængden af primal $\mathbb{P}$ er et multiplikativt fundament for $\mathbb{N}$.

Bevis. Lad $m \in \mathbb{N}$. Hvis m er et primal, så er det trivielt at konstruere m , så antag m ikke er et primal. Da findes $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, som opfylder

$$m = m_1 \cdot m_2, \quad 1 < m_1, m_2 < m.$$

Hvis m_1, m_2 er primal, så har vi konstrueret m ud fra $\mathbb{P}$ og vi er færdige, så antag uden tab af generalitet, at m_1 ikke er et primal. Da findes $m_{11}, m_{12} \in \mathbb{N}$, som opfylder

$$m_1 = m_{11} \cdot m_{12}, \quad 1 < m_{11}, m_{12} < m_1,$$

og således kan vi fortsætte så længe begge ikke er primal. Men bemærk $m > m_1 > m_{11} > \dots > 1$ naturligvis ikke kan fortsætte uendeligt, så efter et endeligt antal trin får vi nødvendigvis primal i faktorisering. Dette viser, at ethvert naturligt tal m kan konstrueres ud fra primtallene.

Et mere formelt argument ville kræve et induktionsbevis, som vi ikke giver her. □

Ovenstående resultat er del af den elementære talteori's vigtigste resultat, nemlig Aritmetikkens Fundamentalsætning. Ikke nok med at alle tal kan skrives som et produkt af primal, så er denne faktorisering faktisk entydig op til rækkefølgen af faktorerne!

2.2 Perspektivering: Rekursive talfølger og Fibonacci talfølge

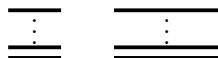
Når vi har set, at alle talpar $\{a, b\}$, hvor $\gcd(a, b) = 1$, udgør et additivt fundament for $\mathbb{N}$, er det naturligt at spørge, på *hvor mange* forskellige måder et givet tal kan konstrueres. For at bevare forbindelsen til det fysiske miljø bestående af linjestykker af forskellige længder (se video), vil vi undersøge følgende beslægtede spørgsmål: På hvor mange forskellige måder kan et linjestykke af længde $m \in \mathbb{N}$ konstrueres ud fra linjestykker af længde $a, b \in \mathbb{N}$, hvor rækkefølgen af linjestykkerne har betydning? Lad N_m notere dette antal, og bemærk at vi eksempelvis for $a = 2$ og $b = 3$ har

$$N_0 = 1, \quad N_1 = 0, \quad N_2 = 1, \quad N_3 = 1, \quad N_4 = 1, \quad N_5 = 2, \quad N_6 = 2, \quad N_7 = 3, \quad N_8 = 4, \quad \dots$$

Vi indfører desuden konventionen $N_{-m} = 0$ for alle $m \in \mathbb{N}$ og $N_0 = 1$.

For at gøre det lettere for os selv i første omgang, lad os betragte linjestykker af længde 1 og 2.

Problem 2.2.1. Lad være givet linjestykker af længde 1 og 2 som vist herunder



Vi vil i det følgende undersøge på *hvor mange* forskellige måder, ethvert givet linjestykke kan bygges.

Ved at prøve os frem opdager vi, at man kan bygge et linjestykke af længde n på følgende antal forskellige måder.

Længde n	0	1	2	3	4	5	6	7
Antal måder	1	1	2	3	5	8	13	21

Vi genkender ovenstående følge som Fibonacci talfølgen, som lægger op til følgende resultat.

Sætning 2.2.2. Lad F_n notere antallet af måder, hvorpå man kan bygge et linjestykke af længde n af mindre linjestykker af længde 1 og 2. Da gælder

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Bevis. De forskellige måder, hvorpå man kan bygge et linjestykke af længde n , kan inddeles i to grupper:

- 1) Alle måder, hvor det sidste lille linjestykke har længde 1.
- 2) Alle måder, hvor det sidste lille linjestykke har længde 2.

Tilsammen udgør de to grupper samtlige måder at bygge et linjestykke af længde n på, og der er intet overlap. Bemærk nu, at antallet af måder man kan bygge linjestykket af længde n , hvor det sidste linjestykke har længde 1, er det samme som antallet af måder man kan bygge linjestykket af længde $n - 1$, altså F_{n-1} . Tilsvarende er antallet af måder man kan bygge linjestykket af længde n , hvor det sidste linjestykke har længde 2, det samme som antallet af måder man kan bygge linjestykket af længde $n - 2$, altså F_{n-2} . Da de to grupper tilsammen udgør samtlige måder at bygge et linjestykke af længde n på, og der intet overlap er, må der gælde

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

hvilket er det ønskede. □

Vi har nu undersøgt på hvor mange forskellige måder, man kan bygge et linjestykke af længde n , med linjestykker af længde 1 og 2; det er naturligt at undersøge samme spørgsmål for linjestykker af andre længder.

Sætning 2.2.3 (Fibonacci tal). Lad $a, b \in \mathbb{N}$ og lad for ethvert $m \in \mathbb{N}$ tallet N_m notere antallet af måder, hvorpå et linjestykke af længde m kan konstrueres af linjestykker af længde a, b , hvor rækkefølgen har betydning. Da gælder

$$N_m = N_{m-a} + N_{m-b}$$

Bevis. Enhver konstruktion af et linjestykke af længde m afsluttes af et linjestykke af længde a eller et linjestykke af længde b , og der er intet overlap mellem disse. Antallet linjestykker af længde m , der ender på et linjestykke af længde a , er netop N_{m-a} , mens antallet af linjestykker af længde m , der ender på et linjestykke af længde b , er netop N_{m-b} . Det følger således, at $N_m = N_{m-a} + N_{m-b}$ □

Bemærk at egenskaben vi viser herover har mange fællestræk med den definerende egenskab for Fibonacci talfølgen; faktisk er antallet af måder, hvorpå man kan konstruere et linjestykke af længde m af linjestykker af længde 1, 2 netop det m 'te Fibonacci-tal! En lukket formel for N_m ville naturligvis være ønskværdig, men de eneste kendte forslag hertil involverer komplekse tal.

2.2.1 Perspektivering: Effektiv konstruktion af nye linjestykker

Med en fornuftig beskrivelse af antallet af måder, hvorpå man kan konstruere et linjestykke af længde m ud fra linjestykker af længde a, b , er et naturligt at spørge, hvordan man konstruerer m mest effektivt; nærmere bestemt spørger vi, hvad er det færrest mulige antal a 'er og b 'er vi skal bruge for at konstruere m . Lad K_m notere dette antal, og bemærk at vi eksempelvis for $a = 2$ og $b = 3$ har

$$K_0 = 0, \quad K_1 = \infty, \quad K_2 = 1, \quad K_3 = 1, \quad K_4 = 2, \quad K_5 = 2, \quad K_6 = 2, \quad K_7 = 3, \quad K_8 = 3, \quad \dots,$$

hvor vi har indført konventionen $K_m = \infty$, hvis m ikke kan konstrueres af $\{a, b\}$.

Sætning 2.2.4. Lad $a, b \in \mathbb{N}$ og lad for ethvert $m \in \mathbb{N}$ tallet K_m notere det mindste antal af linjestykker af længde a, b , som er tilstrækkeligt for at bygge et linjestykke af længde m . Da gælder

$$K_m = \min(K_{m-a}, K_{m-b}) + 1$$

Bevis. Det er klart, at hvis man kan konstruere $m - a$ af K_{m-a} linjestykker af længde a og b , så kan man konstruere m ved at tilføje ét a og dermed totalt bruge $K_{m-a} + 1$ linjestykker. Et tilsvarende argument viser, at man kan konstruere m med i alt $K_{m-b} + 1$ linjestykker, hvorfor vi konkluderer

$$K_m \leq \min(K_{m-a}, K_{m-b}) + 1$$

Hvis man modsat konstruerer m med i alt K_m linjestykker af længde a og b , så kan man fjerne et linjestykke af a eller b og dermed opnå et linjestykke af længde $m - a$ eller $m - b$ konstrueret af i alt $K_m - 1$ linjestykker af længde a og b . Dette viser $K_{m-a} \leq K_m - 1$ eller $K_{m-b} \leq K_m - 1$, så specielt haves

$$\min(K_{m-a}, K_{m-b}) + 1 \leq K_m,$$

hvilket viser det ønskede. □

At bestemme det mindste antal linjestykker af længder a, b , der skal til for at konstruere et linjestykke af længde m , altså at K_m , svarer til at løse minimeringsproblemet

$$K_m = \min \{x + y \mid ax + by = m, \text{ hvor } x, y \in \mathbb{Z}\}.$$

Et skridt på vejen i den retning er faktisk at bestemme samtlige løsninger til ligningen $ax + by = m$, som vi gør med resultatet herunder.

Sætning 2.2.5. Lad $a, b \in \mathbb{Z}$ og lad $m \in \mathbb{N}$. Hvis $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ er en løsning til ligningen

$$ax + by = m,$$

så kan alle øvrige løsninger $x_k, y_k \in \mathbb{Z}$ skrives på formen

$$x_k = x_0 + k \frac{b}{\gcd(a, b)}, \quad y_k = y_0 - k \frac{a}{\gcd(a, b)}.$$

for $k \in \mathbb{Z}$.

Bevis. Antag først $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ er en løsning, og lad x_k, y_k være givet som herover. Da haves

$$ax_k + by_k = ax_0 + k \frac{ab}{\gcd(a, b)} + by_0 - k \frac{ab}{\gcd(a, b)} = ax_0 + by_0 = m,$$

hvilket viser x_k, y_k er en løsning.

Antag nu $x, y \in \mathbb{Z}$ er en løsning til ligningen. Da haves

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = ax + by - (ax_0 + by_0) = m - m = 0,$$

hvorfor vi har $b \mid a(x - x_0)$ og $a \mid b(y - y_0)$. Det følger da, at

$$\frac{b}{\gcd(a, b)} \mid (x - x_0), \quad \frac{a}{\gcd(a, b)} \mid (y - y_0),$$

hvorfor vi har $x - x_0 = k \frac{b}{\gcd(a, b)}$ og $y - y_0 = l \frac{a}{\gcd(a, b)}$ for $k, l \in \mathbb{Z}$. Vender vi tilbage til første udregning, får vi

$$k \frac{ab}{\gcd(a, b)} + l \frac{ab}{\gcd(a, b)} = 0,$$

hvorfor vi har $l = -k$, hvilket viser det ønskede. □

Korollar 2.2.6. Lad $a, b \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ og antag $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ er en løsning til ligningen

$$ax + by = m.$$

Hvis $a \geq b$, så er

$$K_m = x_0 + y_0 - \left\lfloor \frac{y_0 \gcd(a, b)}{a} \right\rfloor \cdot \frac{a - b}{\gcd(a, b)}.$$

Bevis. Lad $x_k, y_k \in \mathbb{Z}$ være en løsning til ligningen $ax + by = m$. Da haves af Sætning [2.2.5](#), at

$$x_k + y_k = x_0 + y_0 - k \cdot \frac{a - b}{\gcd(a, b)},$$

Vi skal således vælge $k \in \mathbb{Z}$ størst muligt, hvor vi endnu har $x_k, y_k \geq 0$, altså

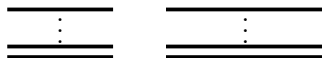
$$x_k = x_0 + k \frac{b}{\gcd(a, b)} \geq 0, \quad y_k = y_0 - k \frac{a}{\gcd(a, b)} \geq 0.$$

Dette $k \in \mathbb{N}$ er givet ved $k = \left\lfloor \frac{y_0 \gcd(a, b)}{a} \right\rfloor$, hvilket viser det ønskede. □

2.2.2 Perspektivering: Primal og Aritmetikkens Fundamentalsætning

Vi arbejder videre fra resultatet, at alle linjestykker af længde større end 1 kan bygges med linjestykker af længde 2 og 3, og undersøger følgende problem.

Problem 2.2.7. Lad være givet linjestykker af længde 2 og 3 som vist herunder



Vi vil i det følgende undersøge, hvilke rektangler med et givet areal, der kan bygges heraf.

Ved at prøve os frem opdager vi, at man kan bygge rektangler med følgende arealer

4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, ...

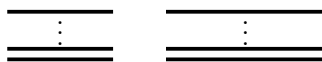
eller med andre ord, at man *ikke* kan bygge rektangler med følgende arealer: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ... Dette giver anledning til følgende definition.

Definition 2.2.8. Lad n være et positivt helt tal. Vi siger, at n er et *sammensat tal*, hvis det kan bygges som arealet af et rektangel, hvor vi bruger kombinationer af linjestykker af længde 2 og 3 som sidelængder.

Vi siger, at n er et *primtal*, hvis det ikke er et sammensat tal.

Vi har nu bygget linjestykker af forskellige længder, og dernæst rektangler med forskellige arealer. Vi fortsætter i samme tråd og undersøger følgende problem.

Problem 2.2.9. Lad være givet linjestykker af længde 2 og 3 som vist herunder



Vi vil i det følgende undersøge, hvilke kasser med et givet rumfang, der kan bygges heraf.

Ved at prøve os frem opdager vi, at man kan bygge kasser med følgende rumfang

8, 12, 16, 18, 20, ...

eller med andre ord, at man *ikke* kan bygge rektangler med følgende arealer:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 19, 21, ...

Dette giver anledning til følgende definition.

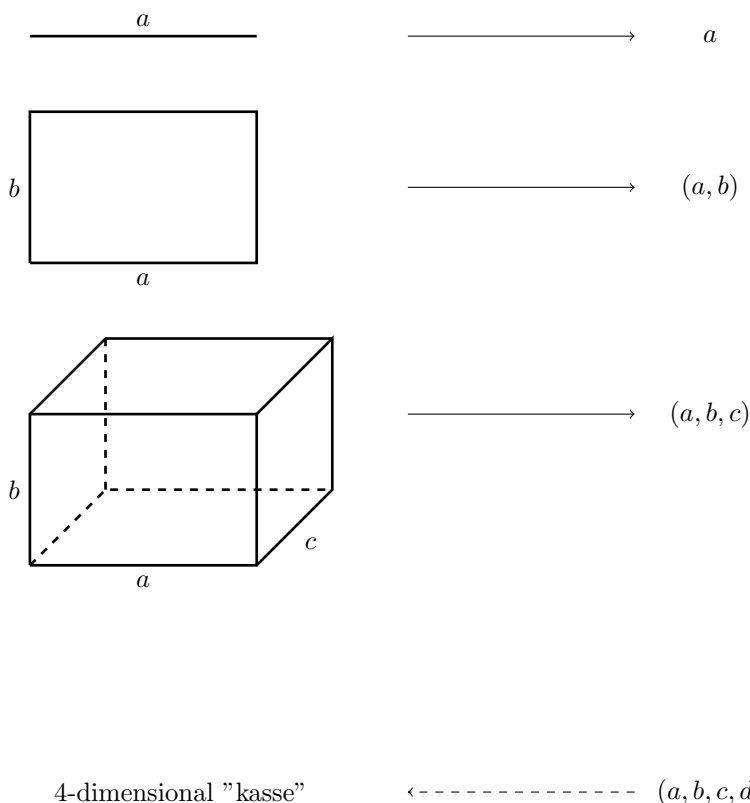
Definition 2.2.10. Lad n være et positivt helt tal. Vi siger, at n er et *3-sammensat tal*, hvis det kan bygges som rumfanget af en kasse, hvor vi bruger kombinationer af linjestykker af længde 2 og 3 som sidelængder.

Vi siger, at n er et *semiprimaltal*, hvis det ikke er et 3-sammensat tal.

Vi har nu bygget linjestykker af forskellige længder, rektangler med forskellige arealer og endelig kasser med forskellige rumfang. Kunne man fortsætte i samme tråd? Vi undersøger følgende spørgsmål.

- Kan man bygge en "kasse" i fire dimensioner?
- Hvordan udregner man "volumen" af en "kasse" i fire dimensioner?
- Kan man bygge en "kasse" i fem, seks, syv og så videre dimensioner?
- Hvordan udregner man "volumen" af en "kasse" i fem, seks, syv og så videre dimensioner?
- Kan man bygge "kasser" i alle dimensioner?
- Findes der nogle tal, så man kan bygge en "kasse" med netop det "rumfang" i alle dimensioner?

Efter diskussion finder vi frem til følgende generalisering



Dette giver anledning til følgende definition.

Definition 2.2.11. En d -dimensional kasse identificeres med d sidelængder, og *volumen* heraf udregnes som produktet af de d sidelængder.

Spørgsmålet om, hvorvidt der findes tal, som optræder som "rumfang" af "kasser" i alle dimensioner har følgende svar.

Theorem 2.2.12. Der findes ingen tal, hvor man kan bygge en "kasse" med netop det "rumfang" i alle dimensioner.

Bevis. Lad n være et tal, der kan bygges som "rumfanget" af en "kasse" i d dimensioner. Da er

$$n = a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_d,$$

hvor a_i er sidelængderne på den d -dimensionale "kasse" med "rumfang" n . Da alle sidelængder er større end eller lig med 2, må der gælde $n \geq 2^d$. Dette kan ikke lade sig gøre for alle d , hvorfor der findes en dimension, hvor man ikke kan bygge en "kasse" med "rumfang" n . $\square$

2.2.3 Perspektivering: Bezout's Identitet

Vi arbejder videre fra observationen, at i mange tilfælde kan man bygge alle linjestykker af længde større end en vis grænse.

Problem 2.2.13. Lad være givet fem bunker med linjestykker af længde henholdsvis 2, 3, 4, 5 og 6 som vist herunder



Vi undersøger, hvilke forskellige længder af linjestykker kan bygges af to givne bunker, hvis man nu må bygge i *begge retninger*, eksempelvis kan vi bygge et linjestykke af længde 2 med linjestykker af længde 3 og 5 som vist herunder.



Ved at prøve os frem opdager vi, at man kan bygge følgende linjestykker ved at lægge eksisterende linjestykker i forlængelse eller modsatrettet af hinanden.

	2	3	4	5	6
2	2,4,6,...	1,2,3,...	2,4,6,...	1,2,3,...	2,4,6,...
3	-	3,6,9,...	1,2,3,...	1,2,3,...	3,6,9,...
4	-	-	4,8,12,...	1,2,3,...	2,4,6,...
5	-	-	-	5,10,15,...	1,2,3,...
6	-	-	-	-	6,12,18,...

På baggrund af ovenstående formulerer vi følgende resultat.

Theorem 2.2.14 (Bezout's Identitet). Lad m, n være positive hele tal. Hvis $\gcd(m, n) = 1$, så kan alle linjestykker bygges ved at lægge linjestykker i forlængelse eller modsatrettet af hinanden.

Bevis. Beviset kræver Euklid's Algoritme og udelades af hensyn til omfang. $\square$